

電腦如何解魔術方塊？

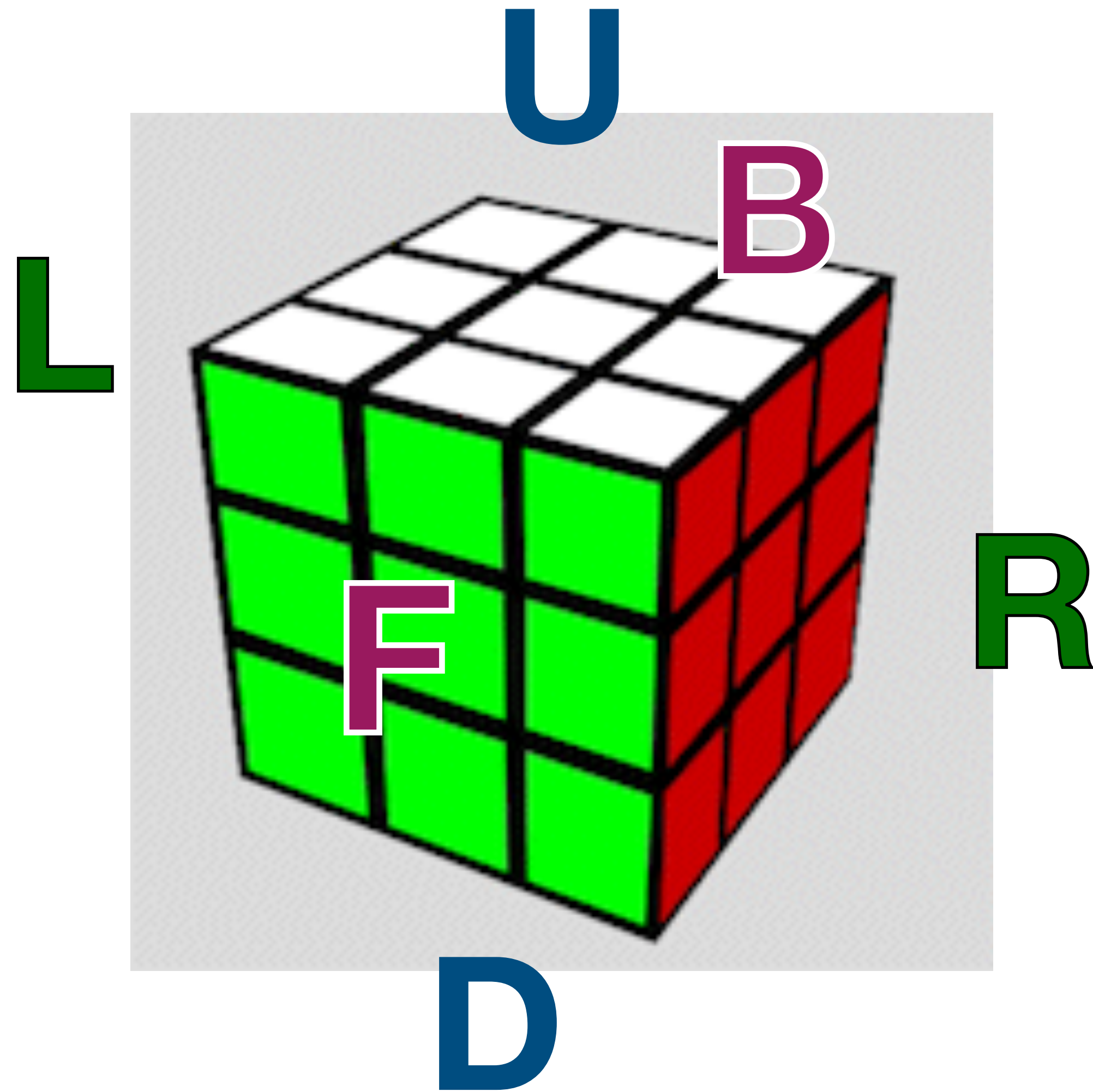
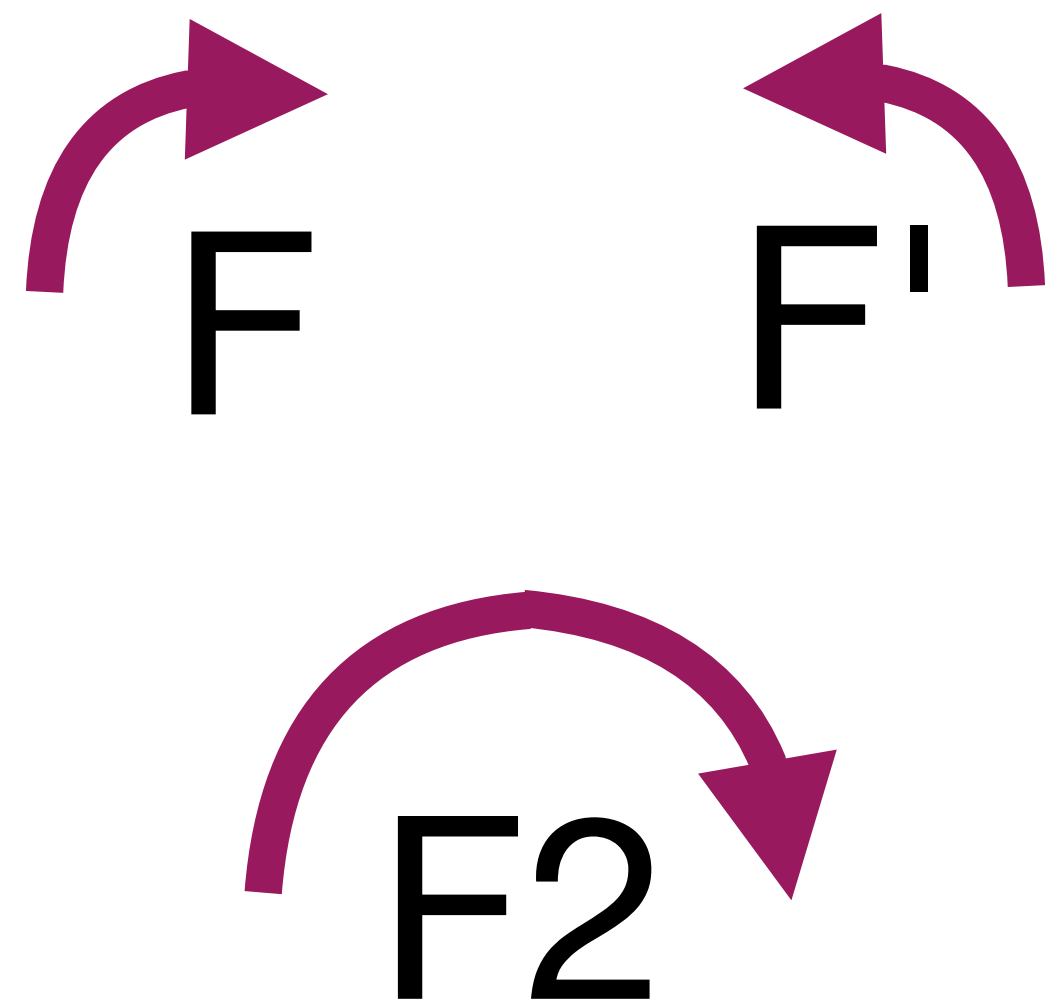
方塊轉不快

v1.0.2 , updated at 2023/08/22



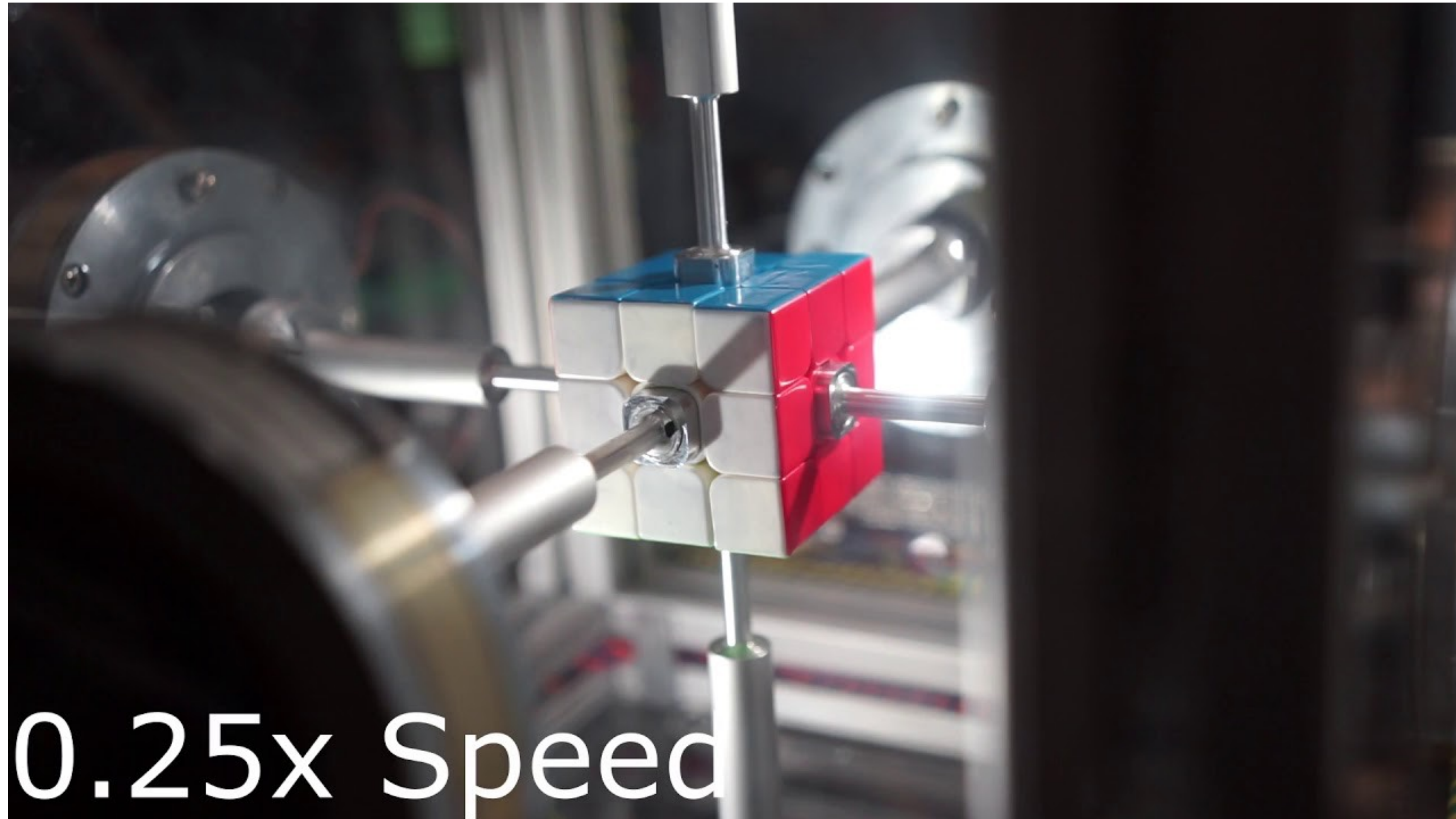
This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

魔術方塊？



我沒看過人解魔術方塊耶？

然而...



(注意他花幾步)

from Ben Katz, <https://www.youtube.com/watch?v=nt00QzKuNVY>

人怎麼解方塊

「公式」 = 模式辨認 + 固定步驟



大部分人看到的



魔方玩家看到的

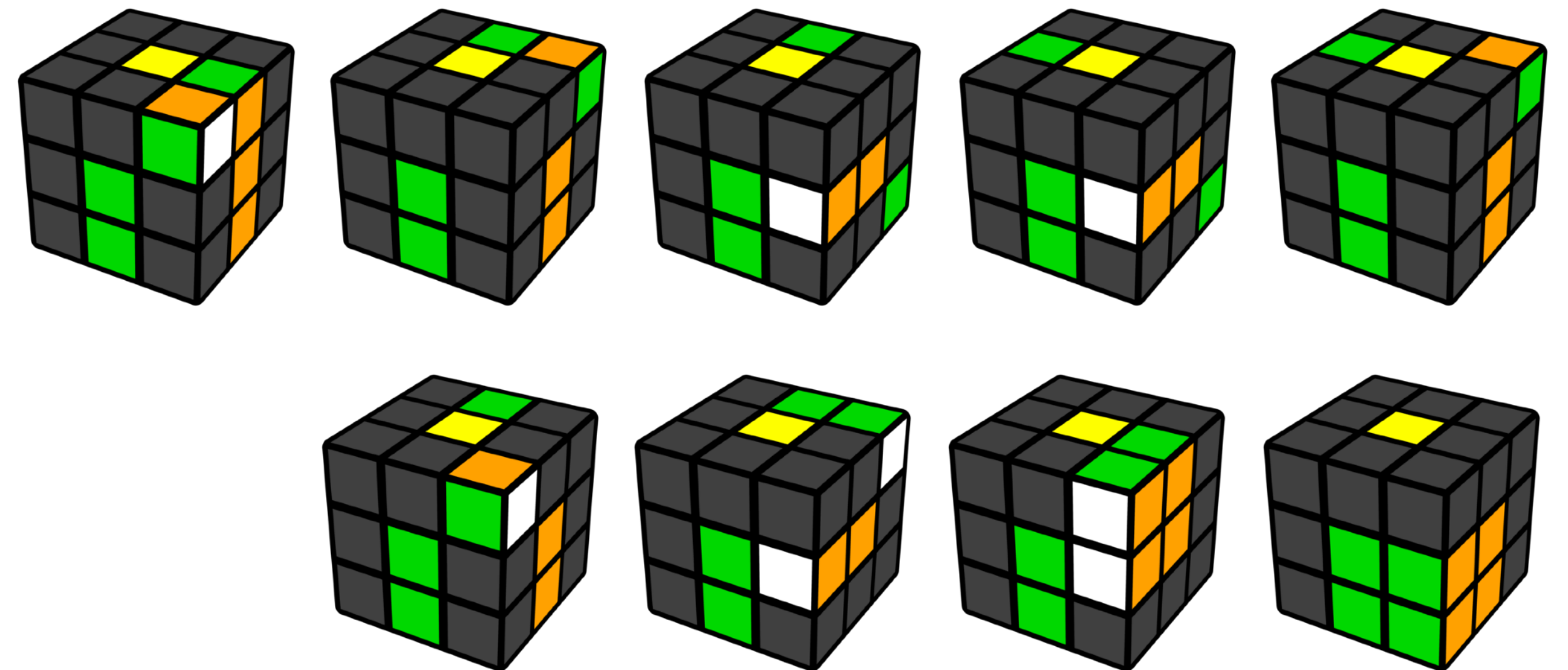
人怎麼解方塊

因為看到

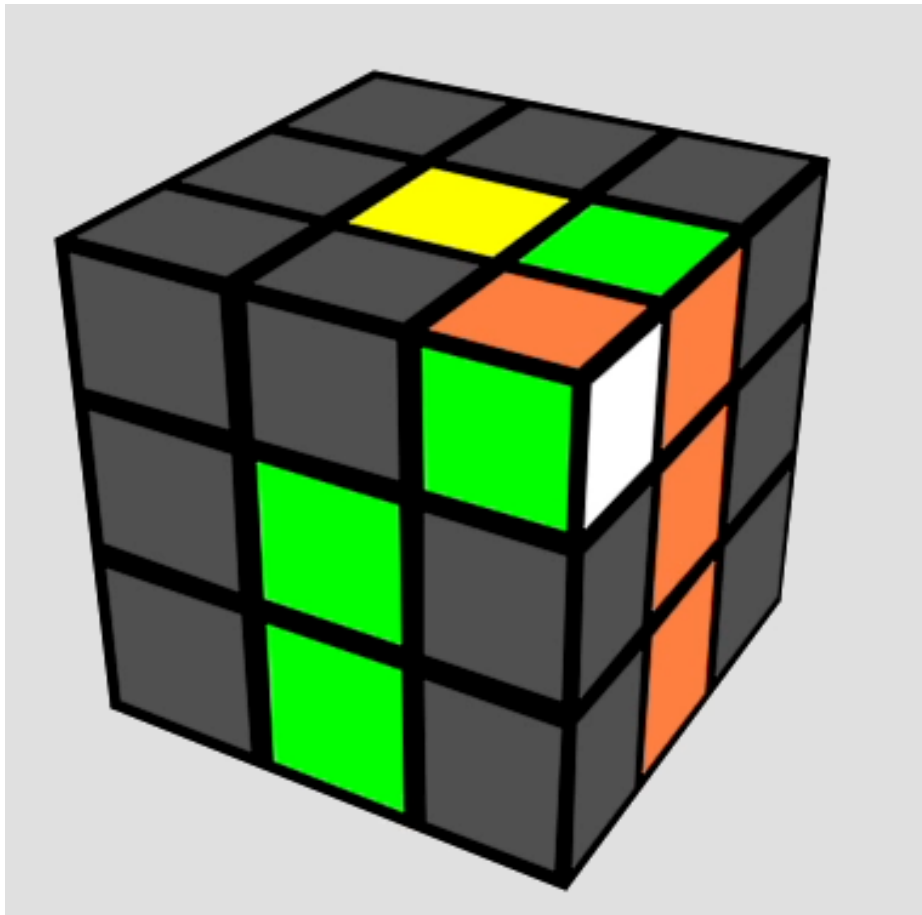


所以轉

$U' R U' R' U R U R'$



電腦「可以」怎麼解方塊

```
if (  )  
{  
  do( U' R U' R' U R U R' );  
}
```

電腦「可以」怎麼解方塊

1. 用人類的方式解

2.

3.



50 步



50 步



50 步

用電腦解方塊的目的？

可不可以不受人類智慧限制？

可不可以發掘新公式？

可不可以更少步？

...

接下來的目標

在合理時間 (~秒) 找出滿少步 (20幾) 的解法

電腦的優勢/劣勢

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100000 = ?$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100000 = ?$$

人

答案是

~~50000~~50000

電腦

```
sum = 0
for i in 1 to 100000:
    sum = sum + i
return sum
```

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + 100000^4 = ?$$

人

... 我找一下公式

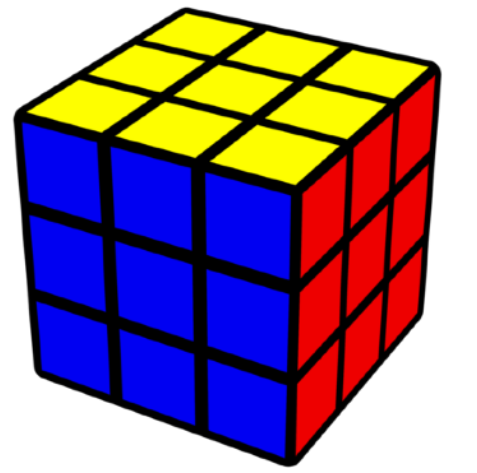
電腦

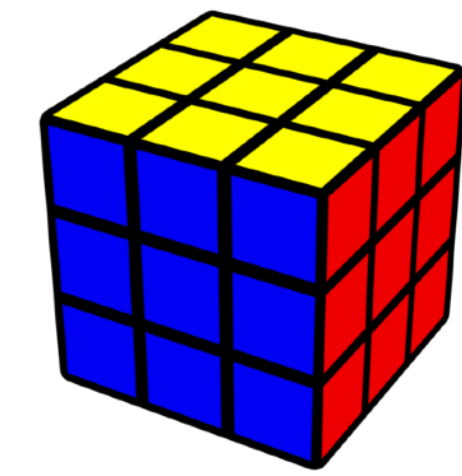
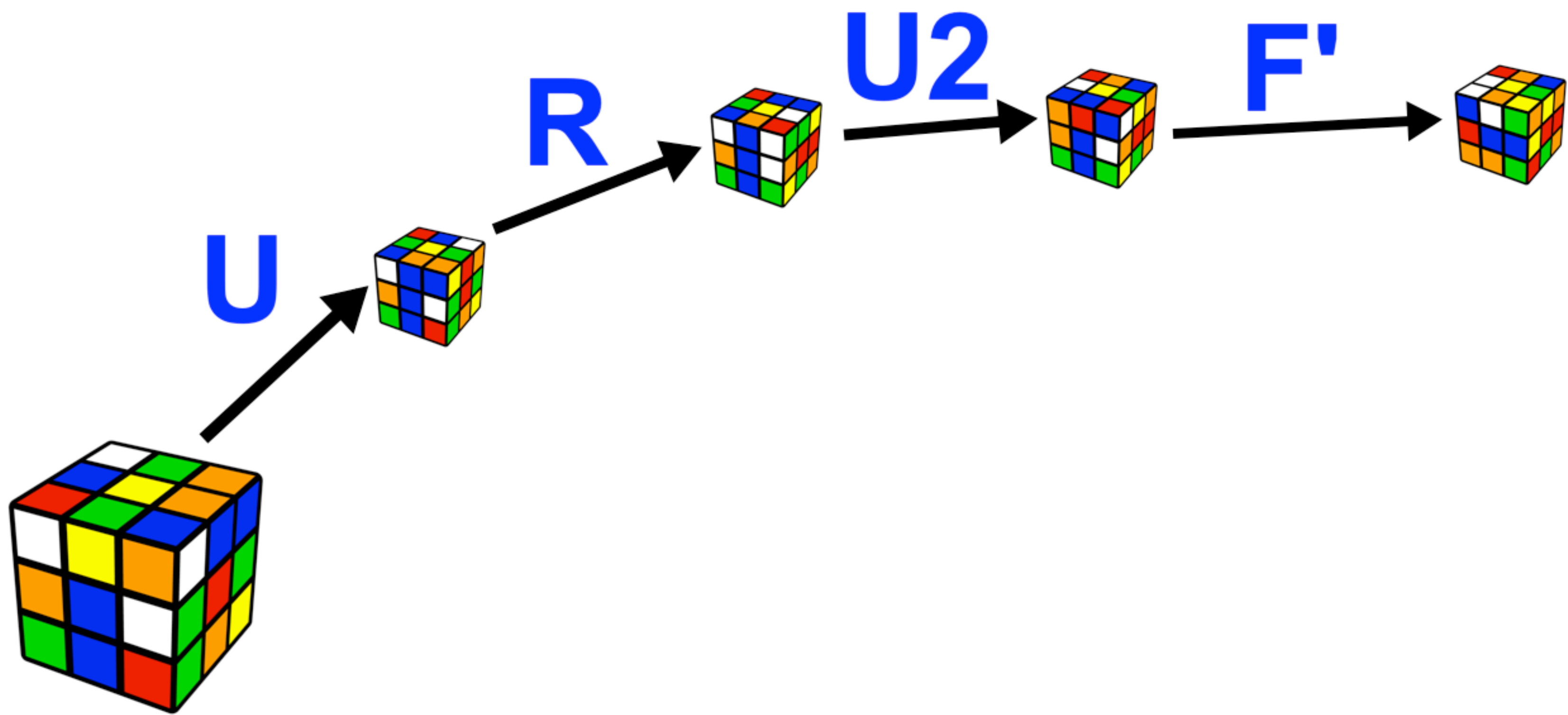
```
sum = 0
for i in 1 to 100000:
    sum = sum + i**4
return sum
```

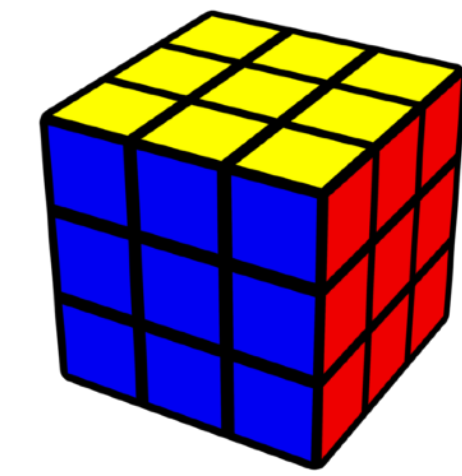
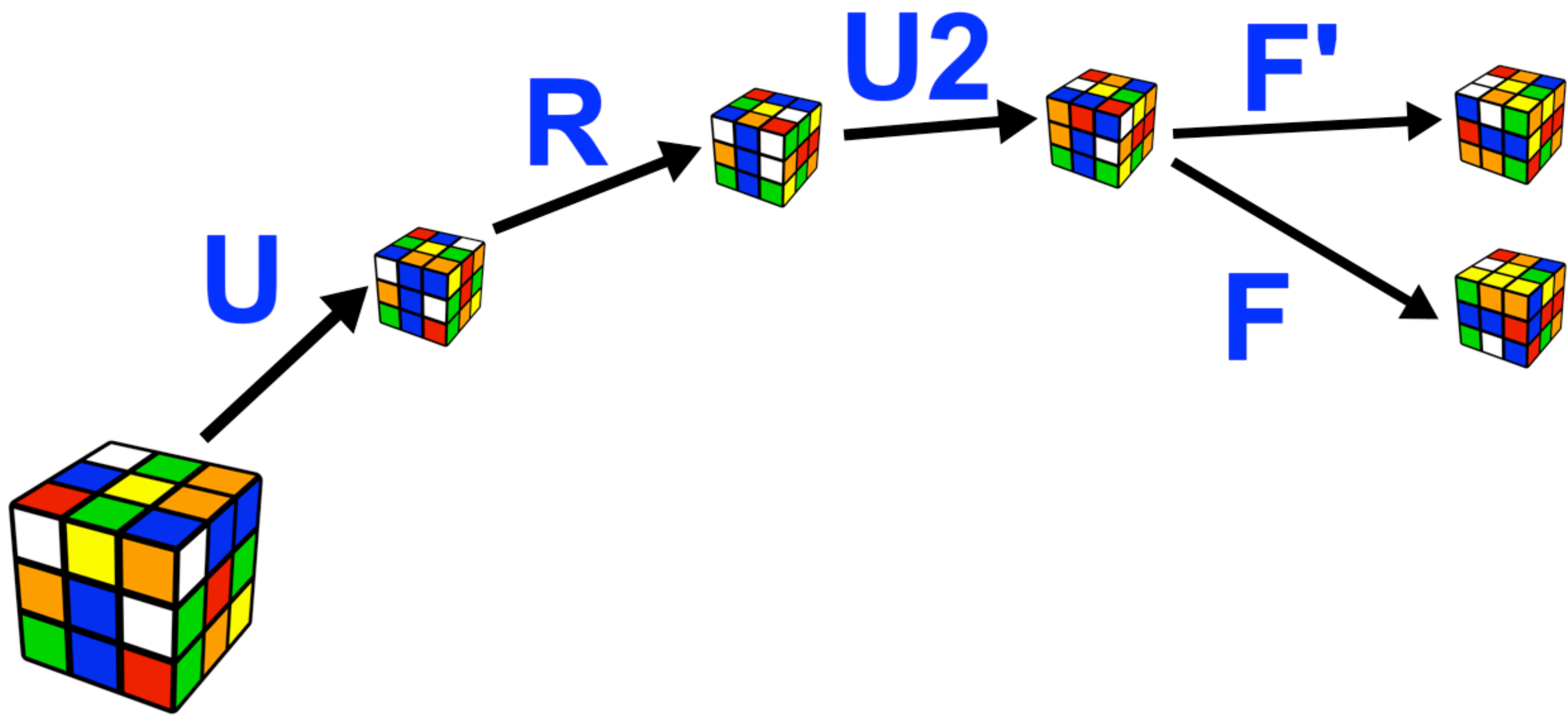
Naive 先！

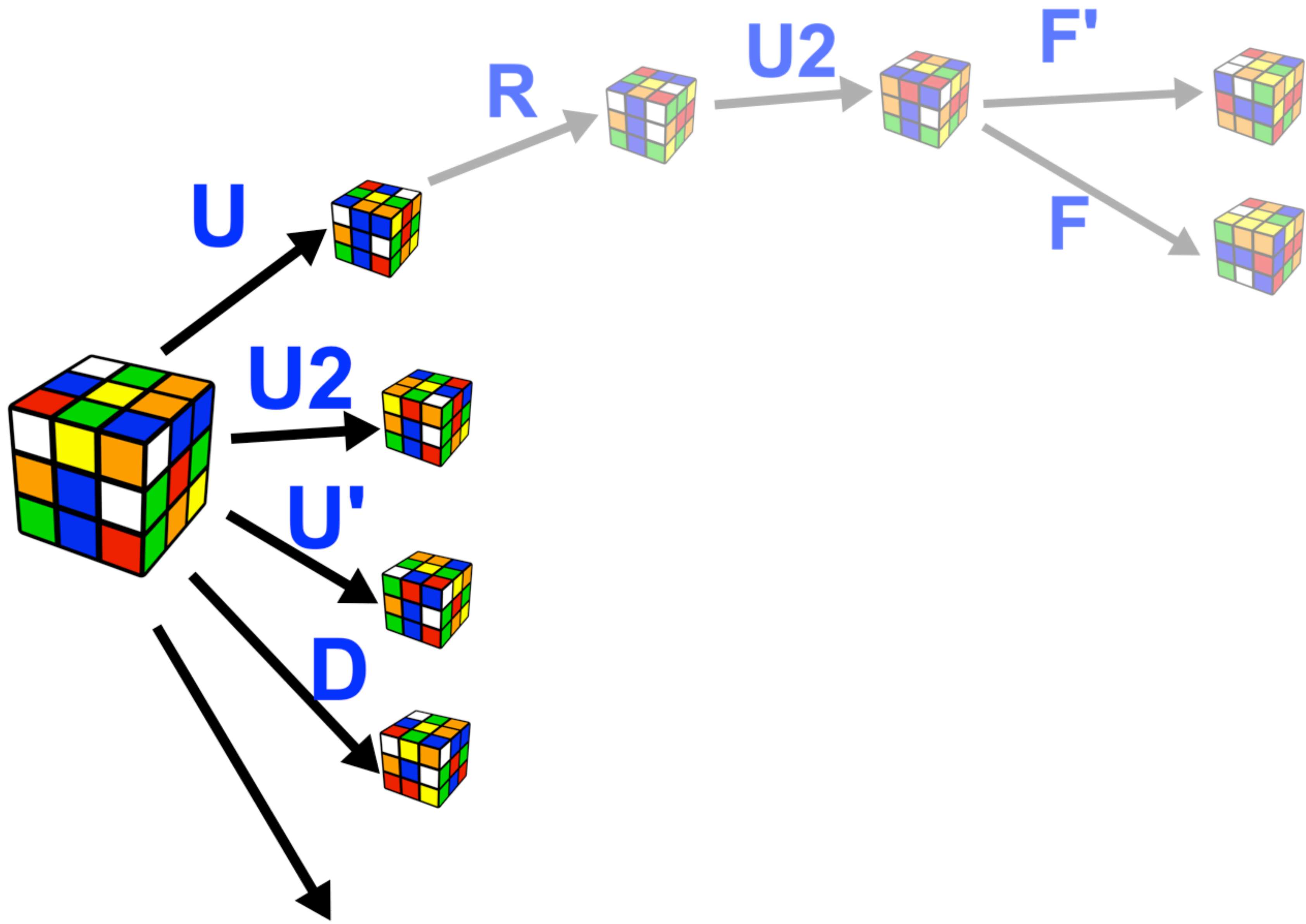
不靠公式，靠暴力毅力，一直轉一直「搜尋」

反正電腦算很快... 吧？









接下來的目標

在合理時間 (~秒) 找出滿少步 (20幾) 的解法

時間？

如果試過 10 步的轉法們

$18^{10} = 3,570,467,226,624$ 轉法

U U2 U'

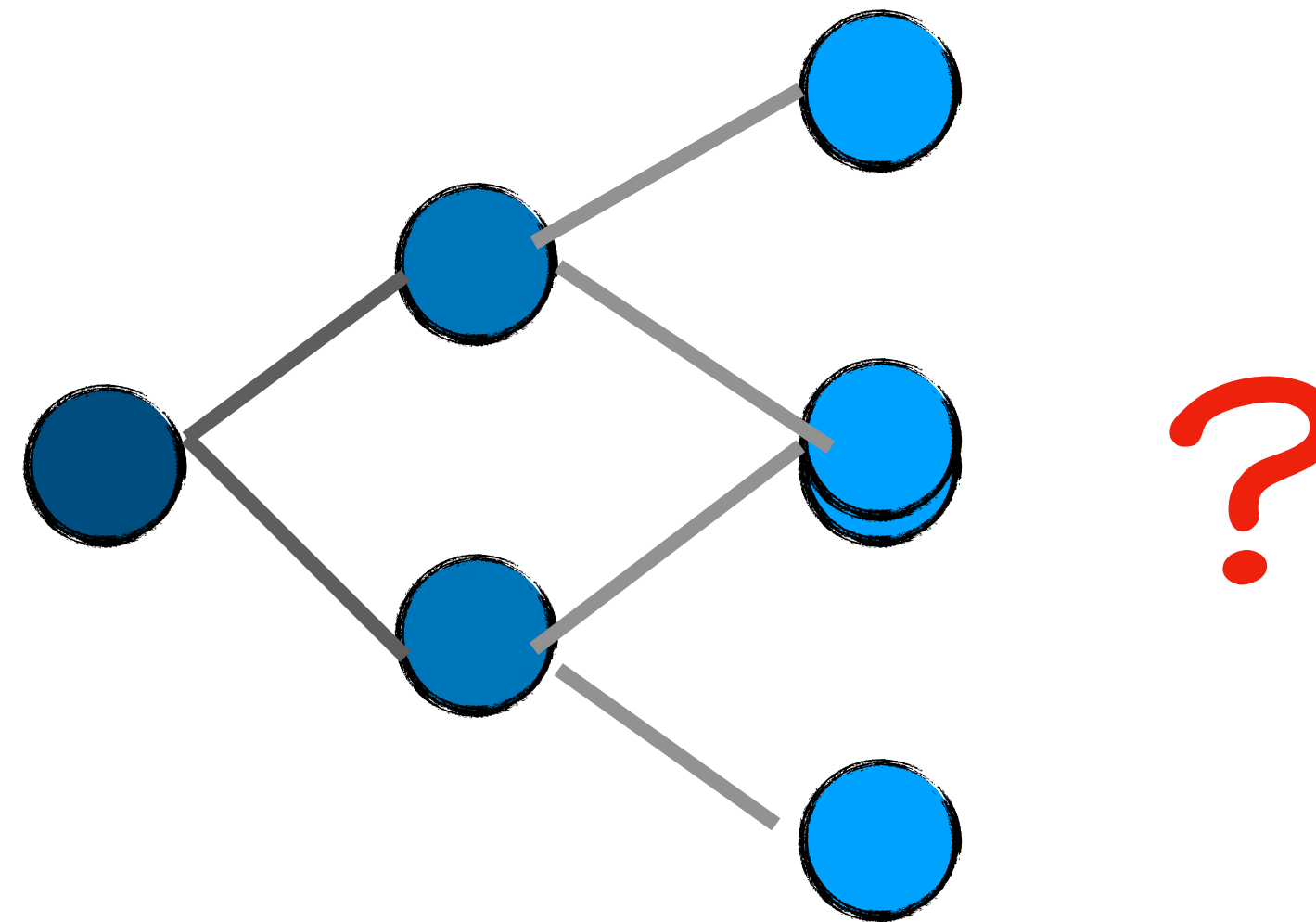
D D2 D'

L L2 L'

R R2 R'

F F2 F'

B B2 B'



如果試過 10 步的轉法們

其實是 232,248,063,316 轉法
億 萬

但，就算電腦一秒鐘能試過一億次轉法...

40 分鐘

而且其實 10 步幾乎解不了魔方

空間？

我不當場算啦 JOJO

事先算好 背答案

算一年

 : R2 U R ... D F

 : U B' R2 ... F U

⋮

 : F' L R' ... U2 D

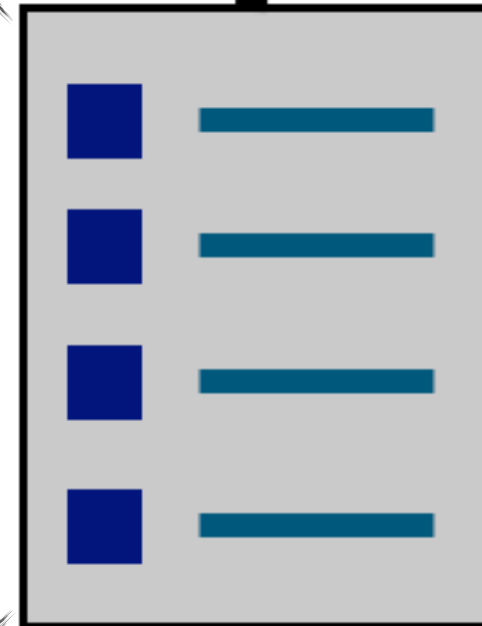
事先算好 背答案

 : R2 U R ... D F

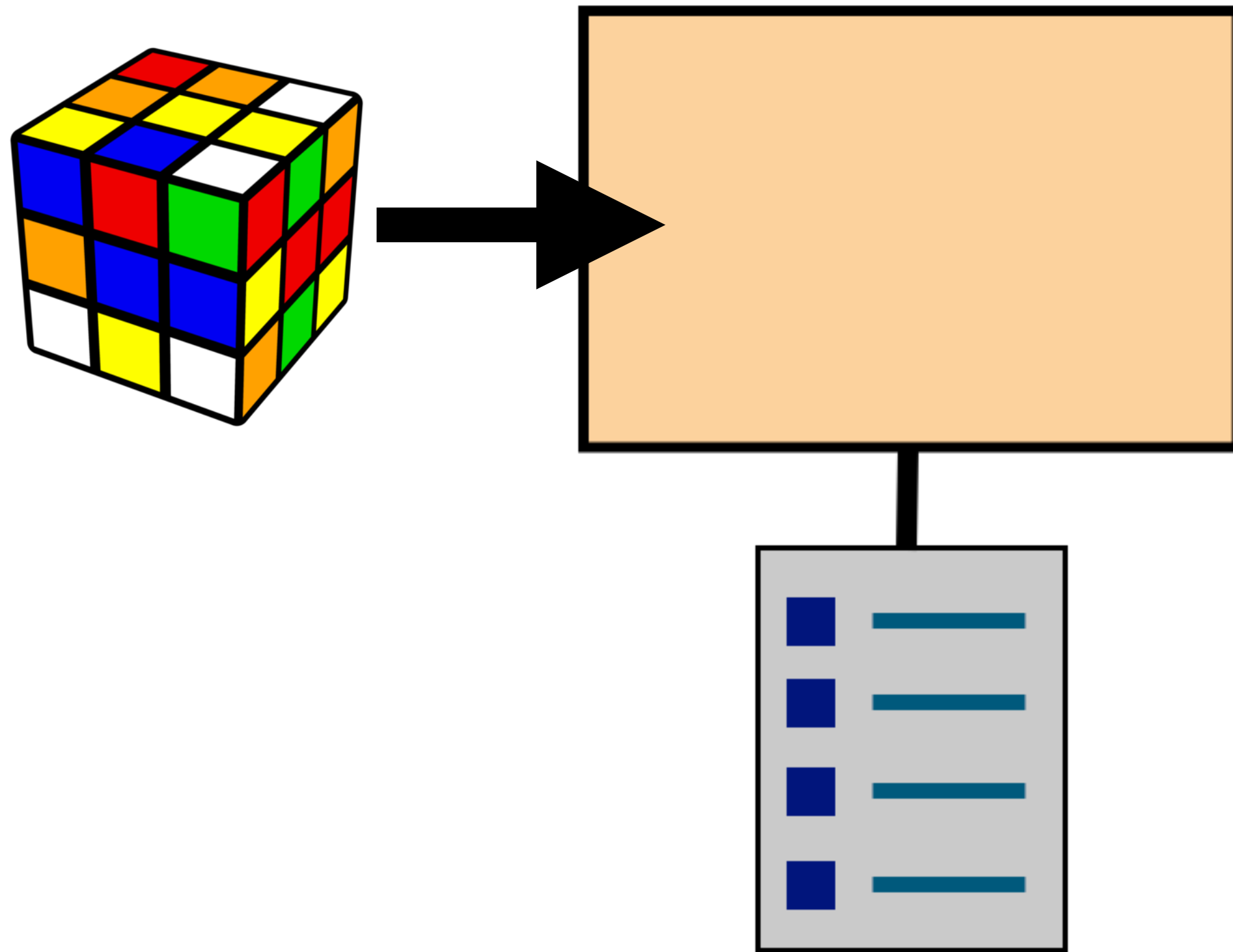
 : U B' R2 ... F U

⋮

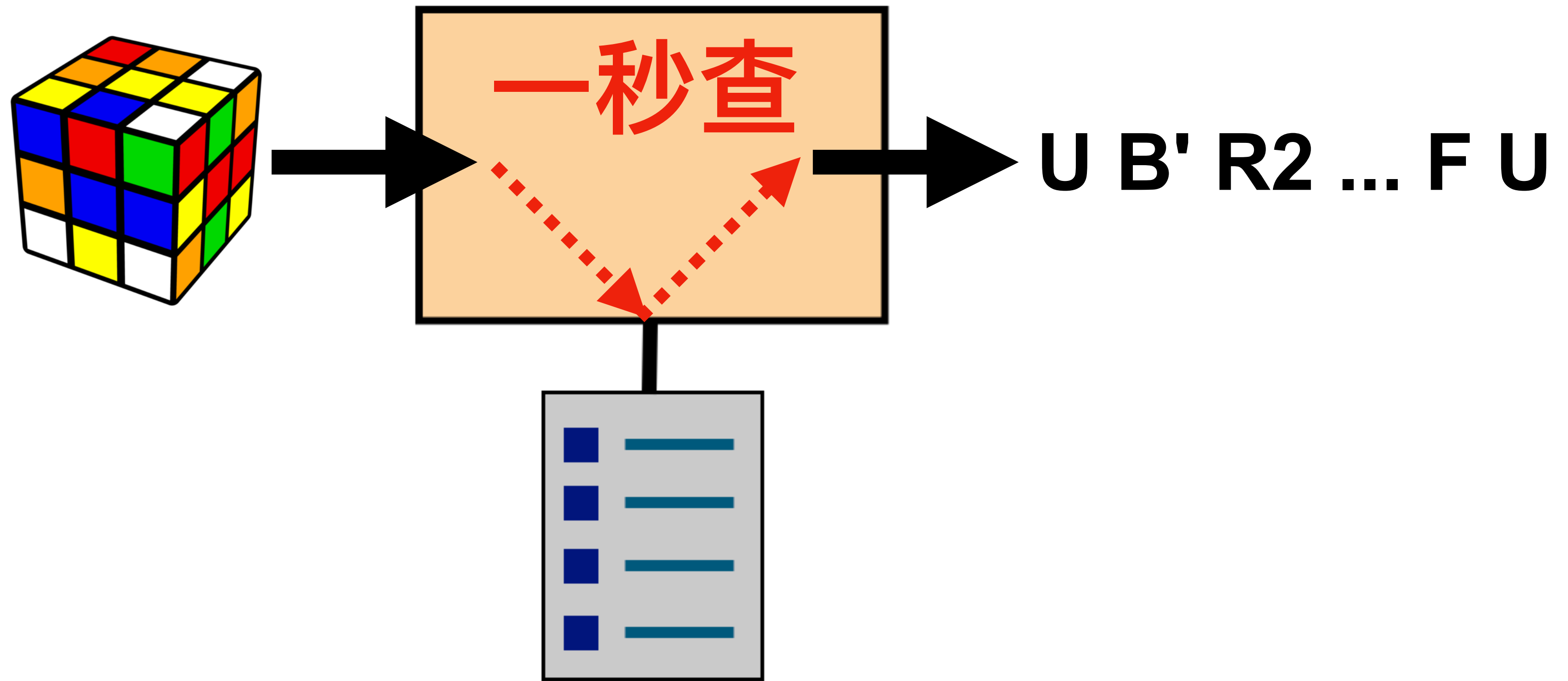
 : F' L R' ... U2 D



事先算好 背答案



事先算好 背答案



有獎徵答！

請問 3x3 魔方能轉出多少組合狀態？

約 43,000,000 種

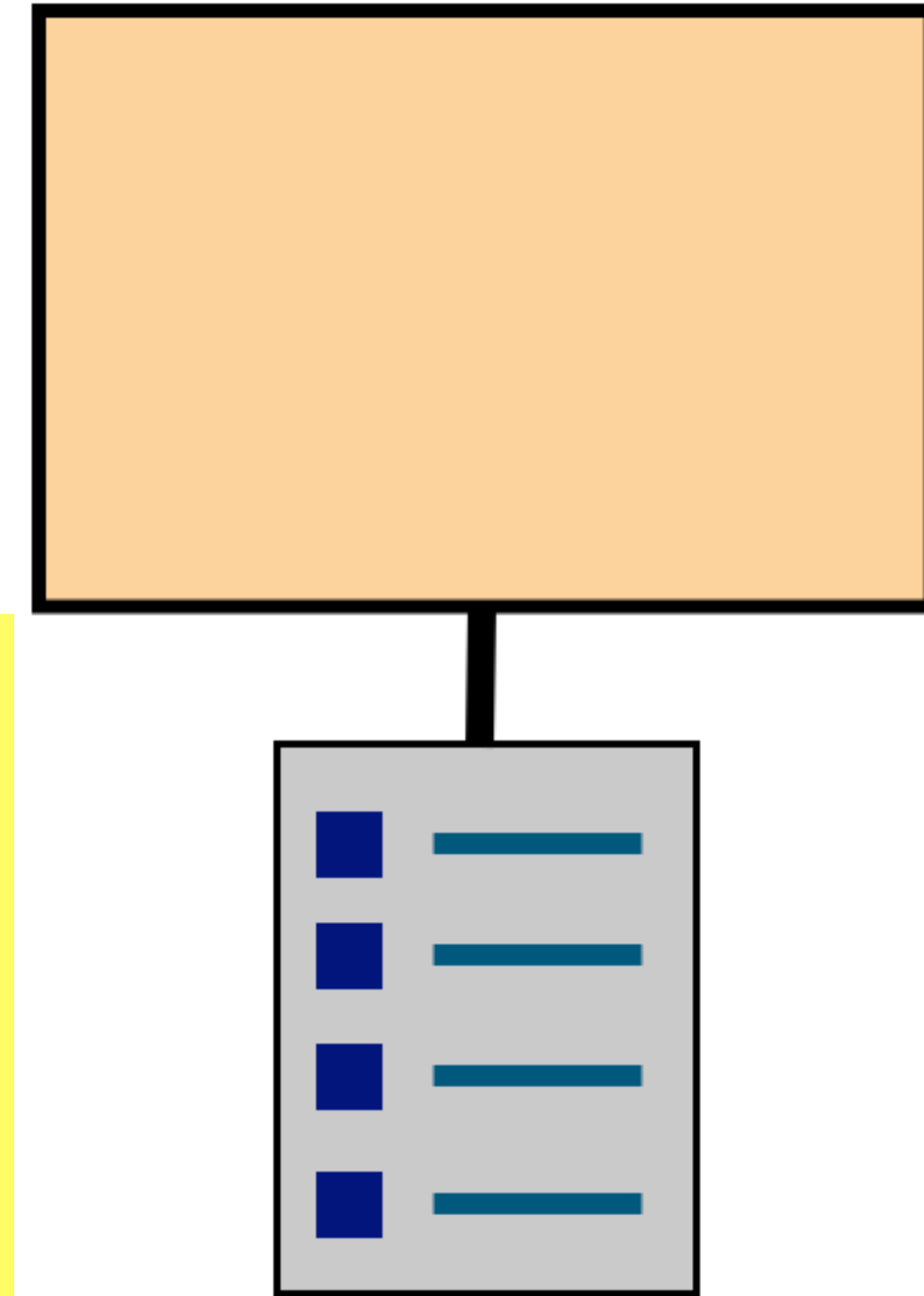
約 43,000,000,000 種

約 43,000,000,000,000,000,000 種

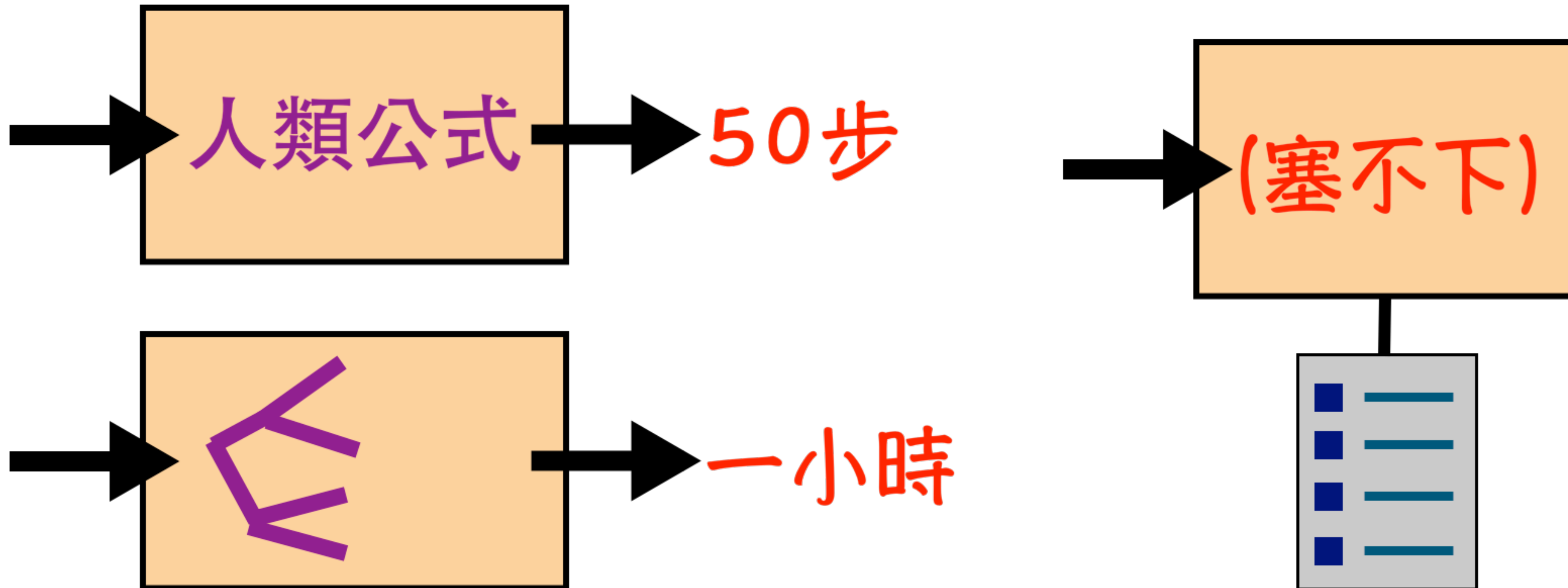
約 4.3×10^{69} 種

千萬顆硬碟！

約 43,000,000,000,000,000 種
GG T G



暴力搜尋... Nope



Kociemba's Algorithm

1992

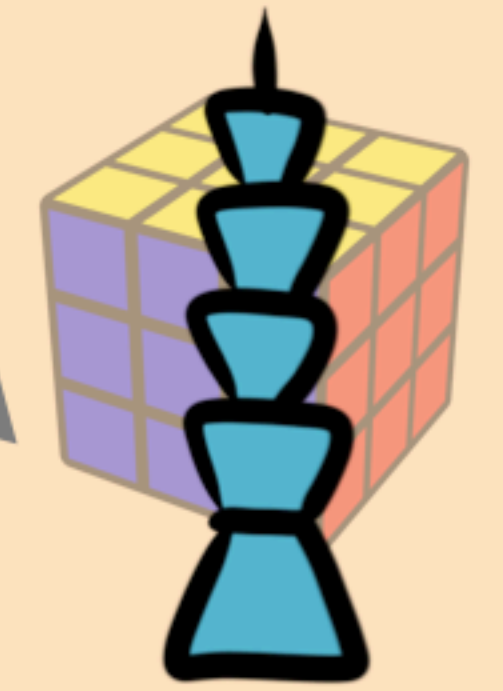
用 2000 年的電腦，數秒內能找到 20 步內

分段 + 剪枝



大問題

??

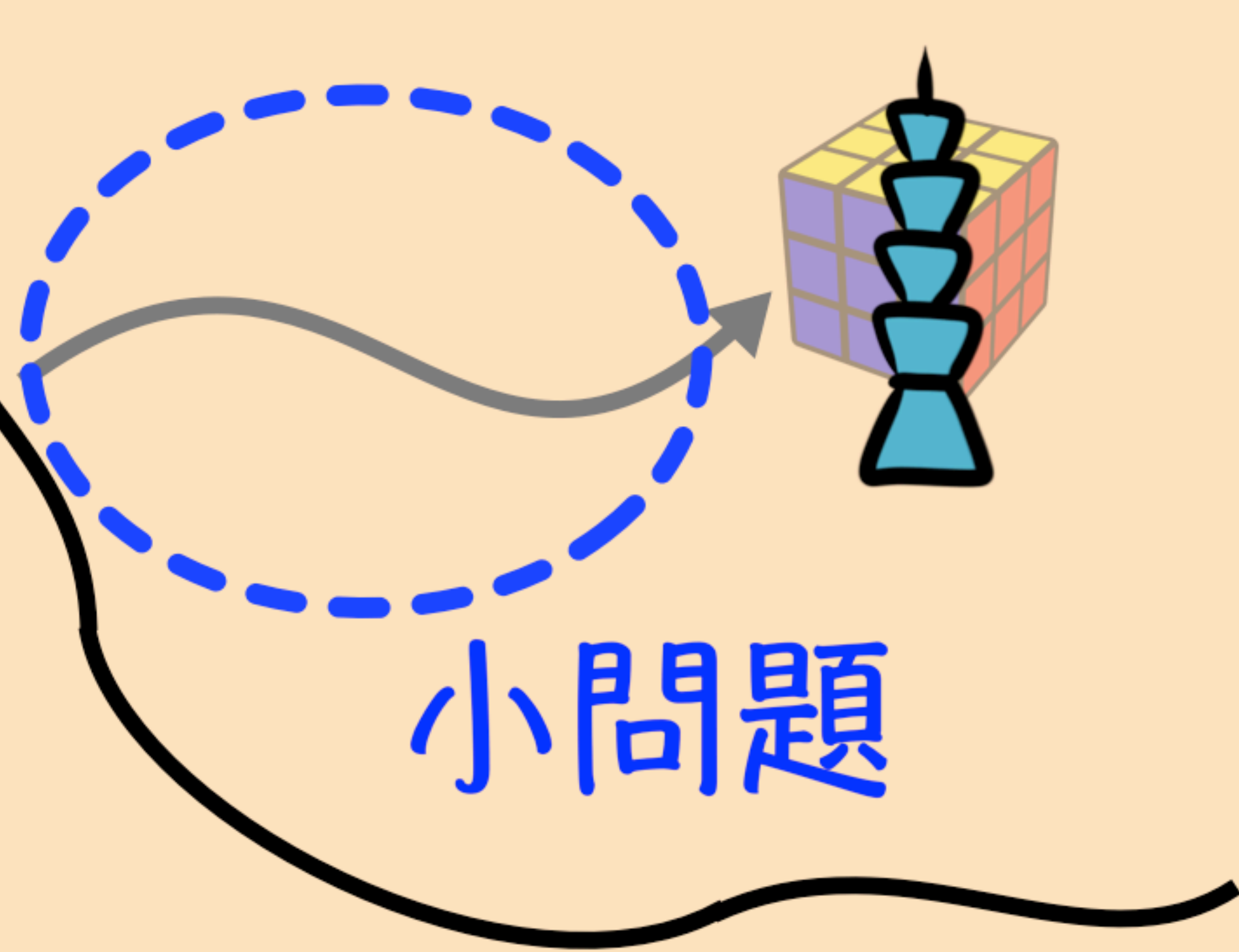


43,000,000,000,000,000 種組合

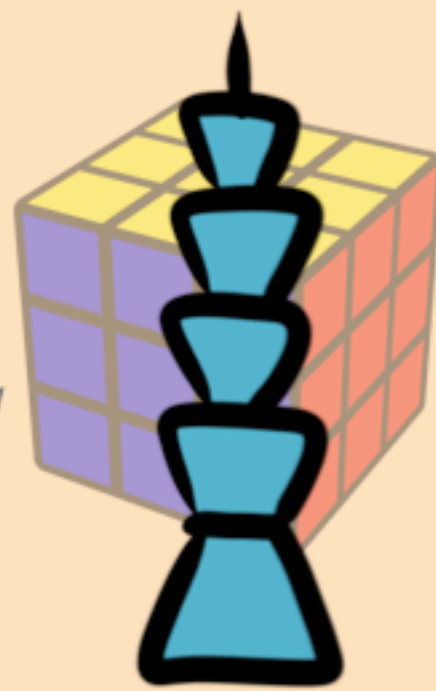
兩階段搜尋



小問題



小問題



凡人的想法



解下兩層



解好



數學家的想法

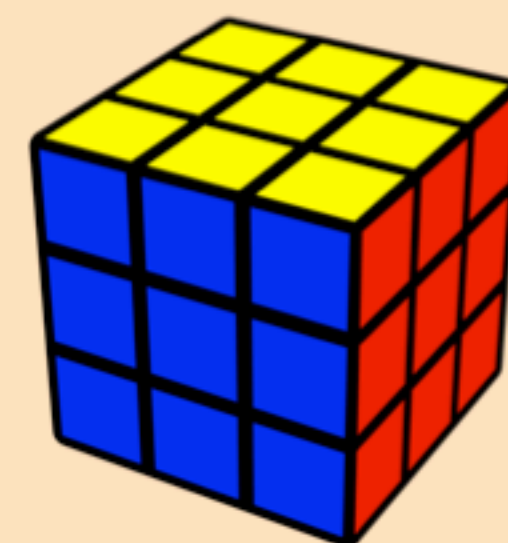


數學家的想法



把方塊變成「可只用
L2, R2, F2, B2, U, D
就解好」的狀態

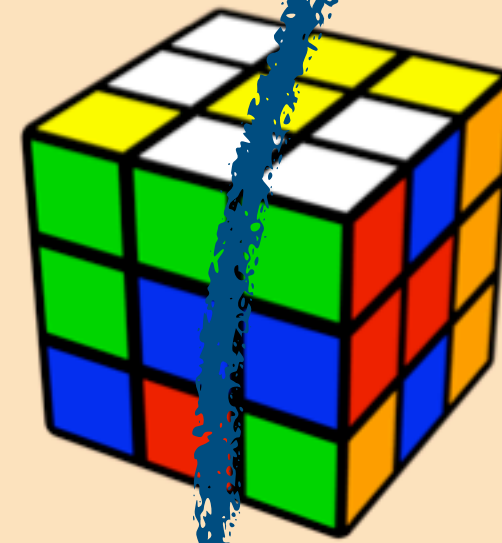
數學家的想法



把方塊變成「可只用
L2, R2, F2, B2, U, D
就解好」的狀態

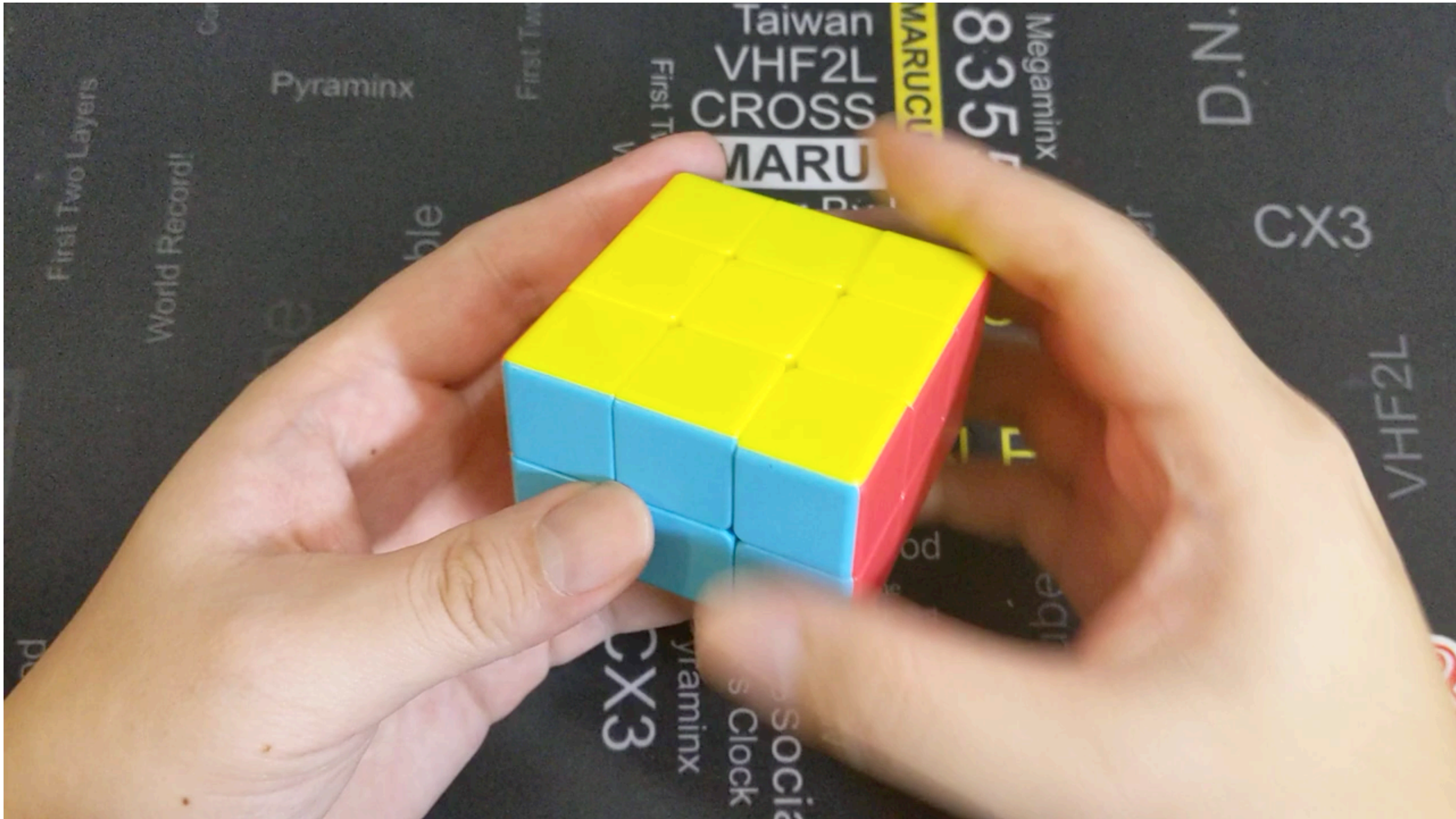
只用
L2, R2, F2, B2, U, D
解好方塊

數學家的想法

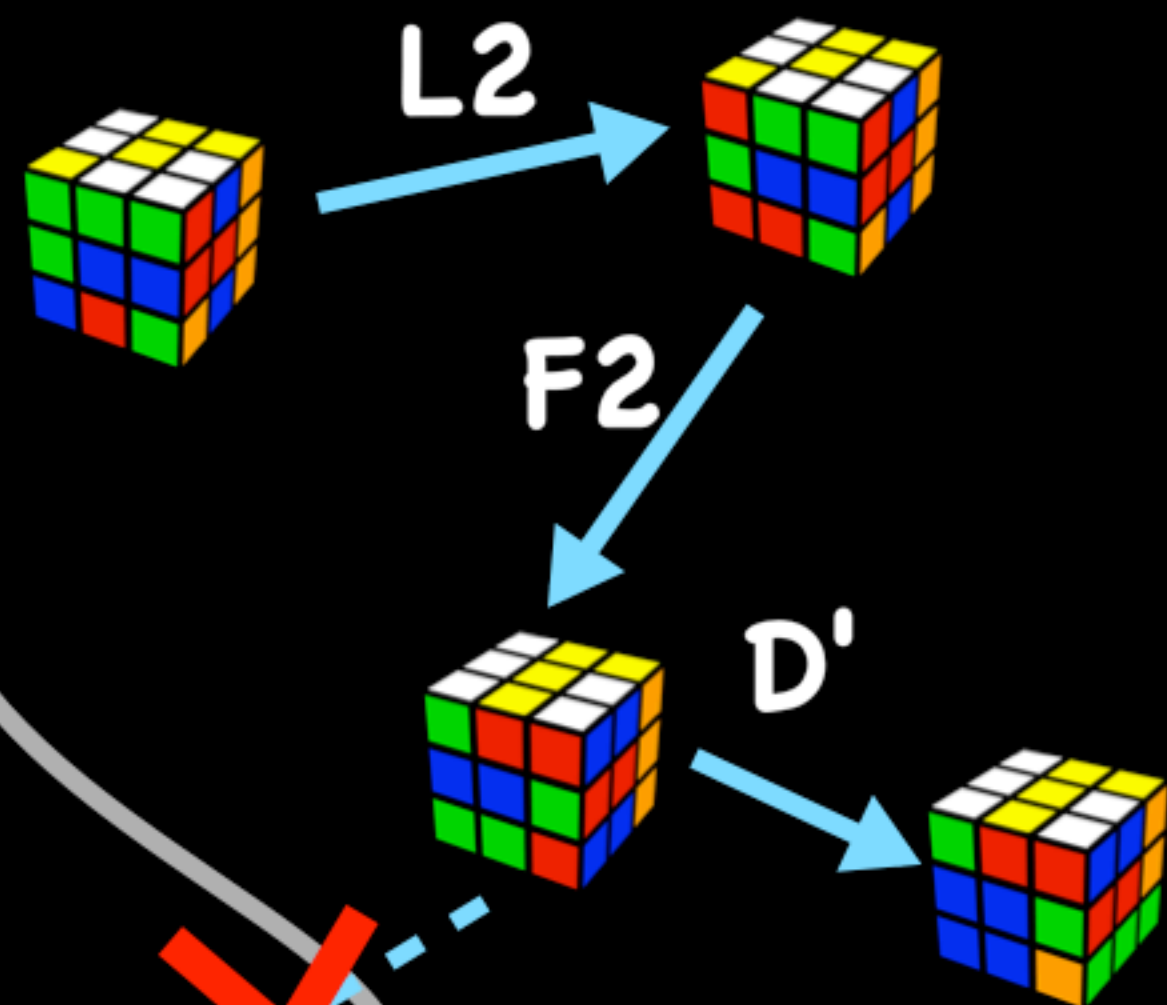


把方塊變成「可只用
L2, R2, F2, B2, U, D
就解好」的狀態

只用
L2, R2, F2, B2, U, D
解好方塊



第二段



第一段

封閉性

把方塊變成「可以只用
L2, R2, F2, B2, U, D
就解好」的狀態

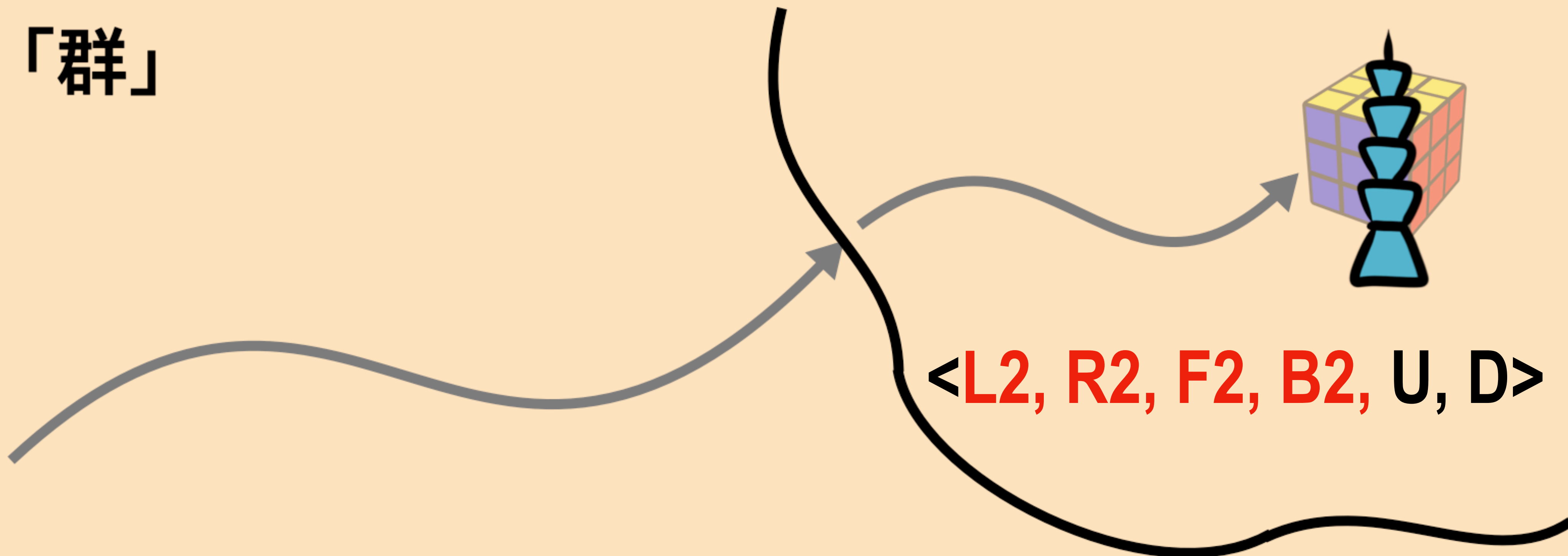


只用 L2, R2, F2, B2,
U, D 解好方塊

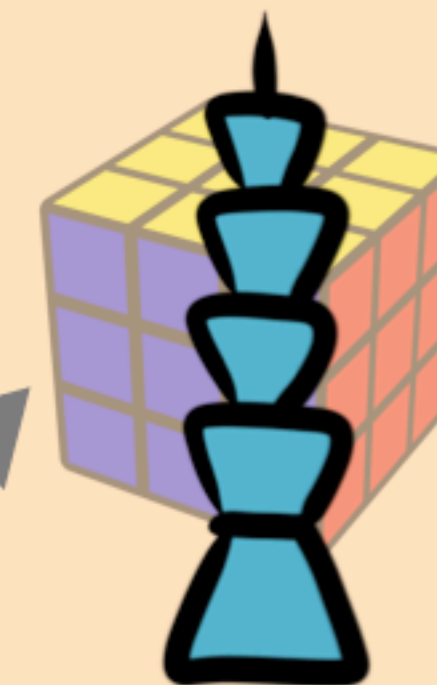
魔術方塊「群」



<L, R, F, B, U, D>



<L2, R2, F2, B2, U, D>



魔術方塊「群」



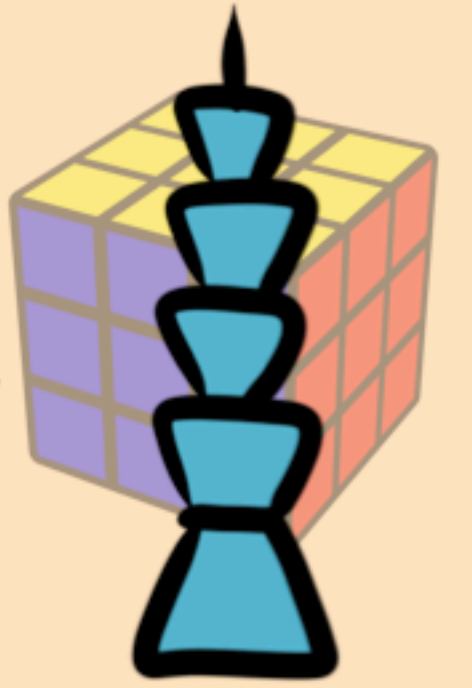
$\langle L, R, F, B, U, D \rangle$



$\langle L2, R2, F2, B2, U, D \rangle$

19,000,000,000 種

魔術方塊「群」



<L2, R2, F2, B2, U, D>

~ 19,000,000,000 種

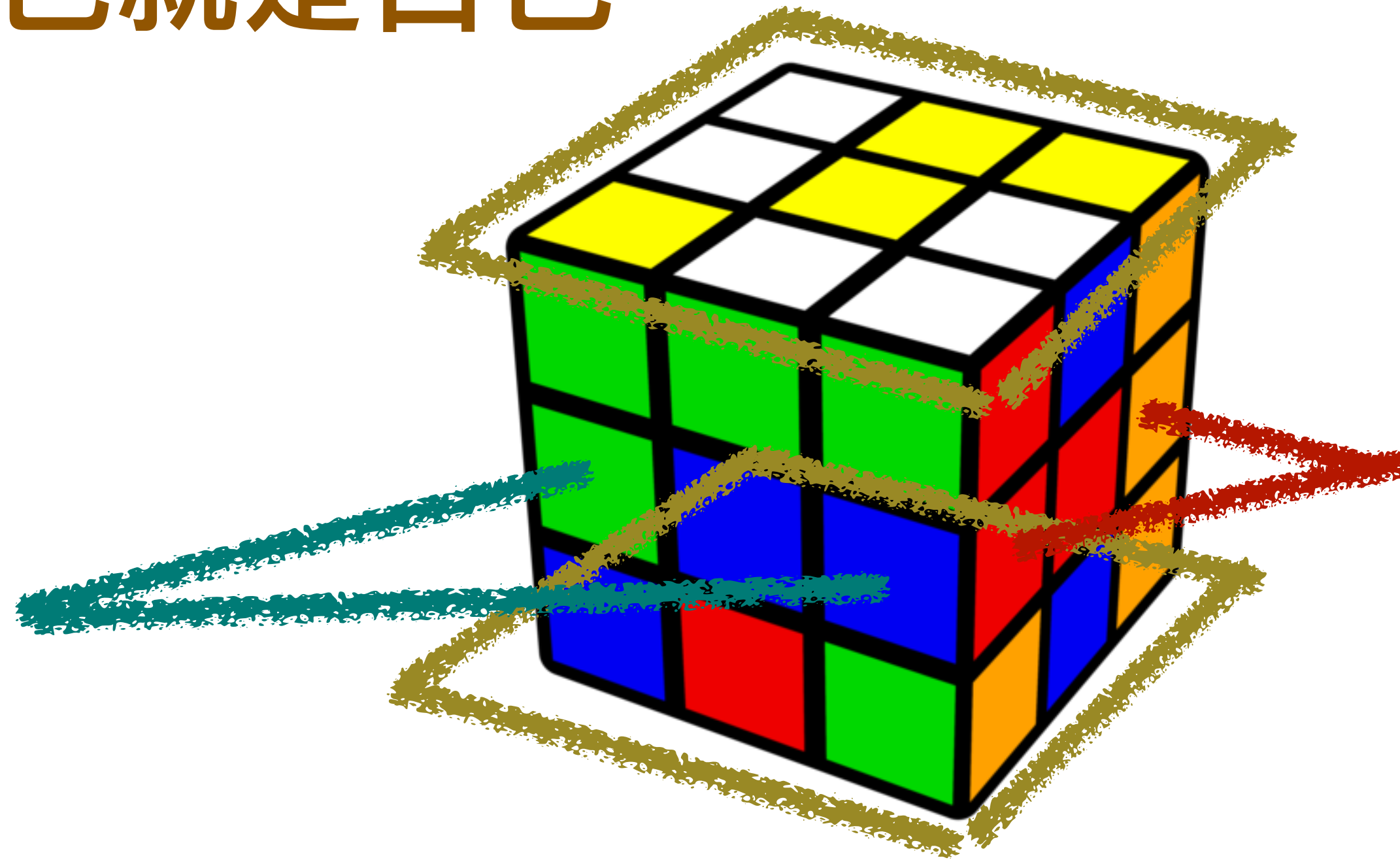
<L, R, F, B, U, D>

仍然 43,000,000,000 ,000,000,000 !?

長這樣的都叫台北人

頂面不是黃色就是白色

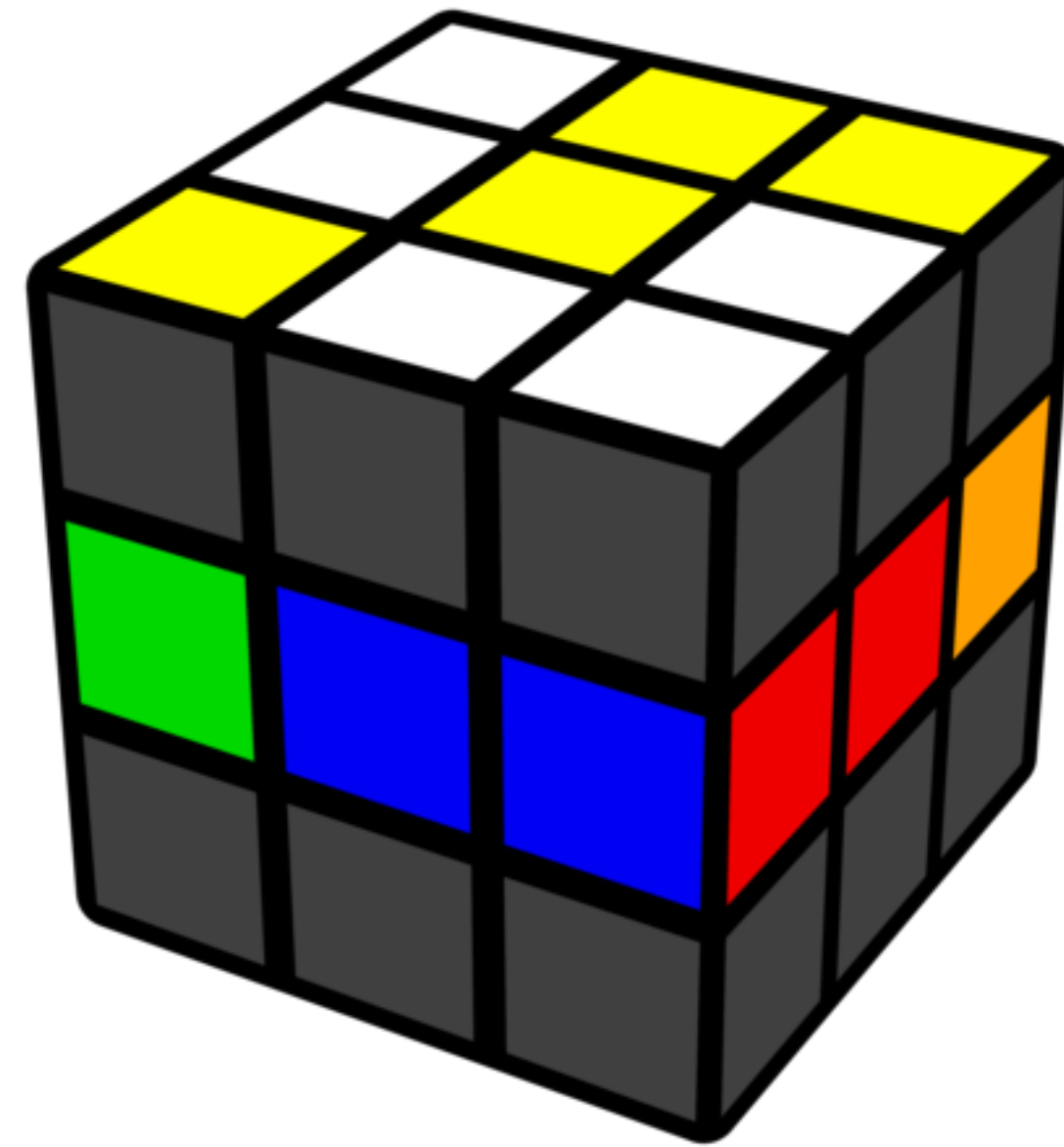
不是藍色就是綠色



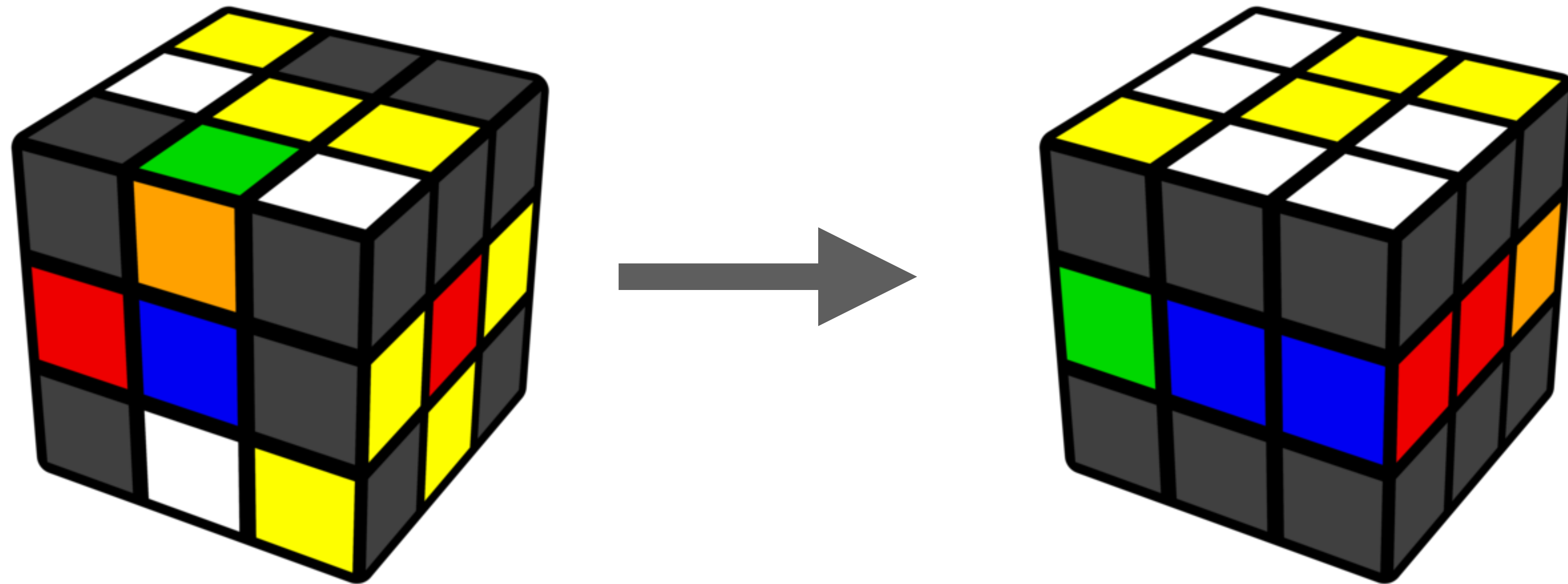
不是紅色
就是橘色

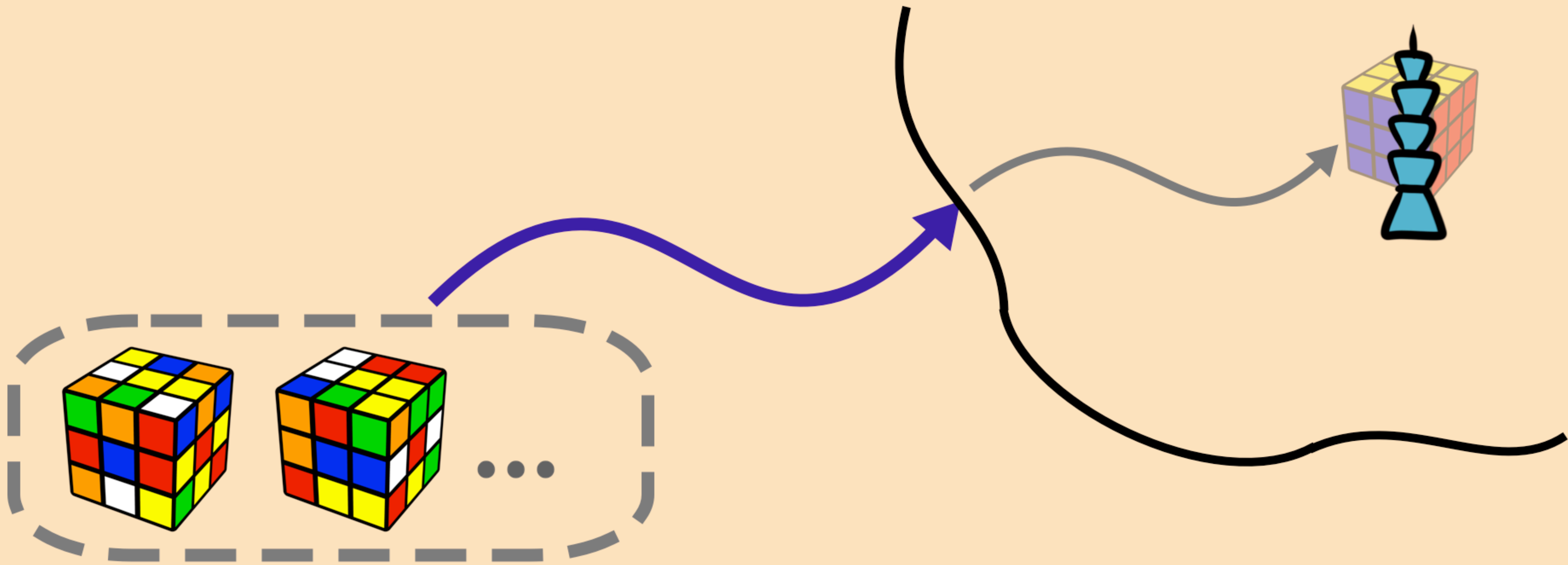
底面也一樣，不是黃色就是白色

只有某些特質重要



只有某些特質重要





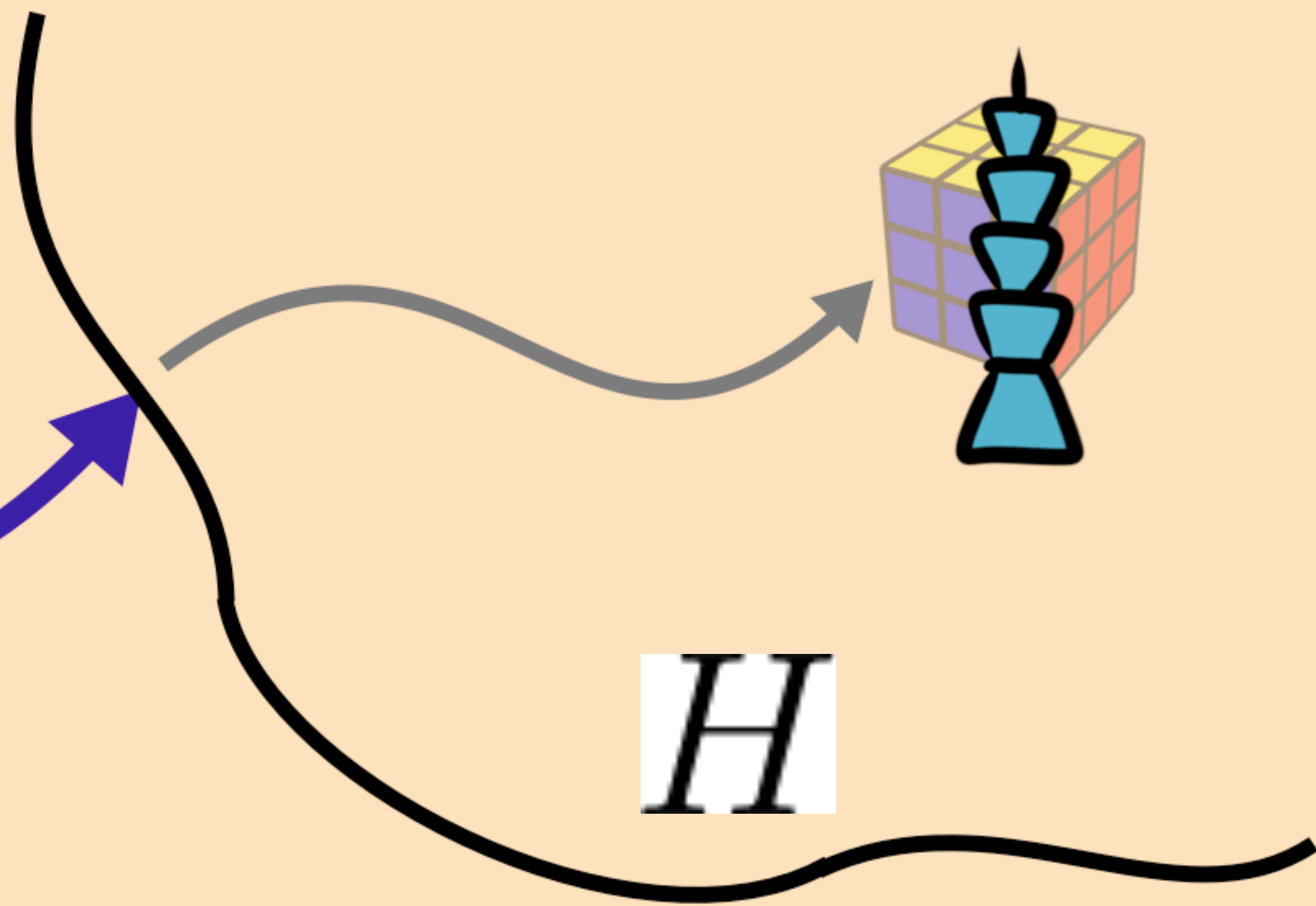
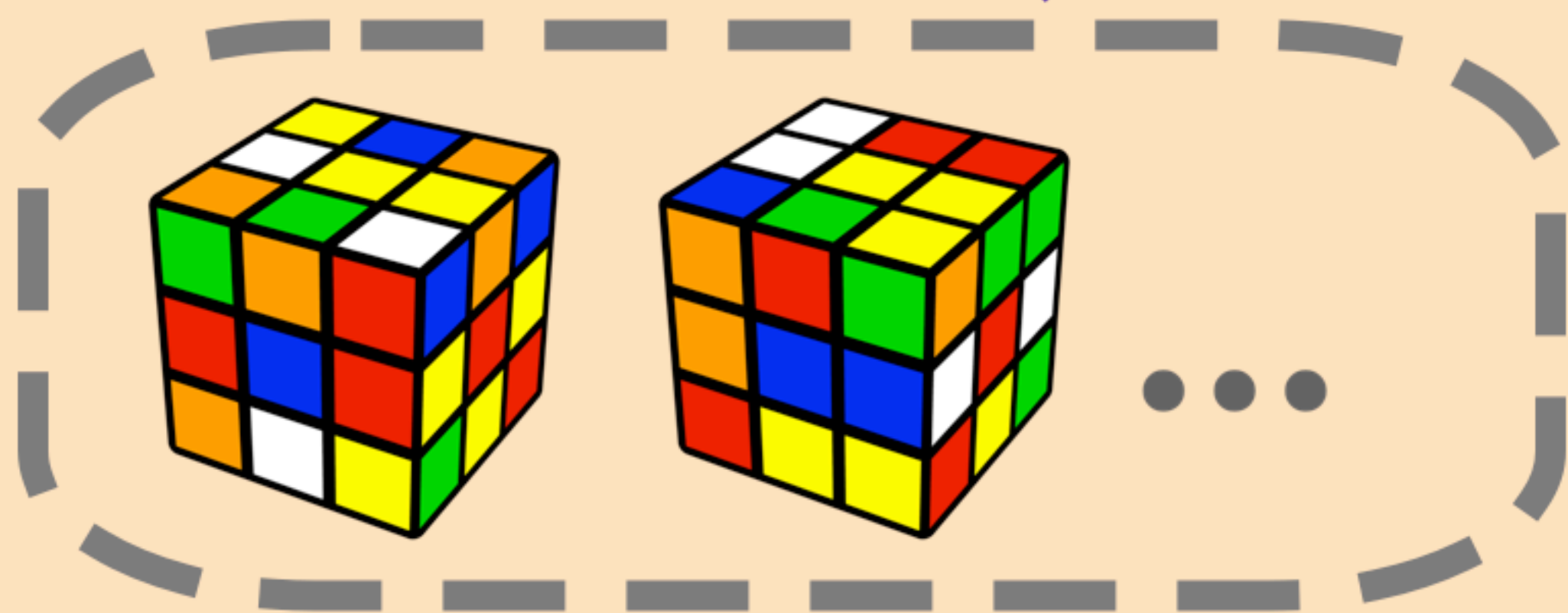
追蹤某些特質就好

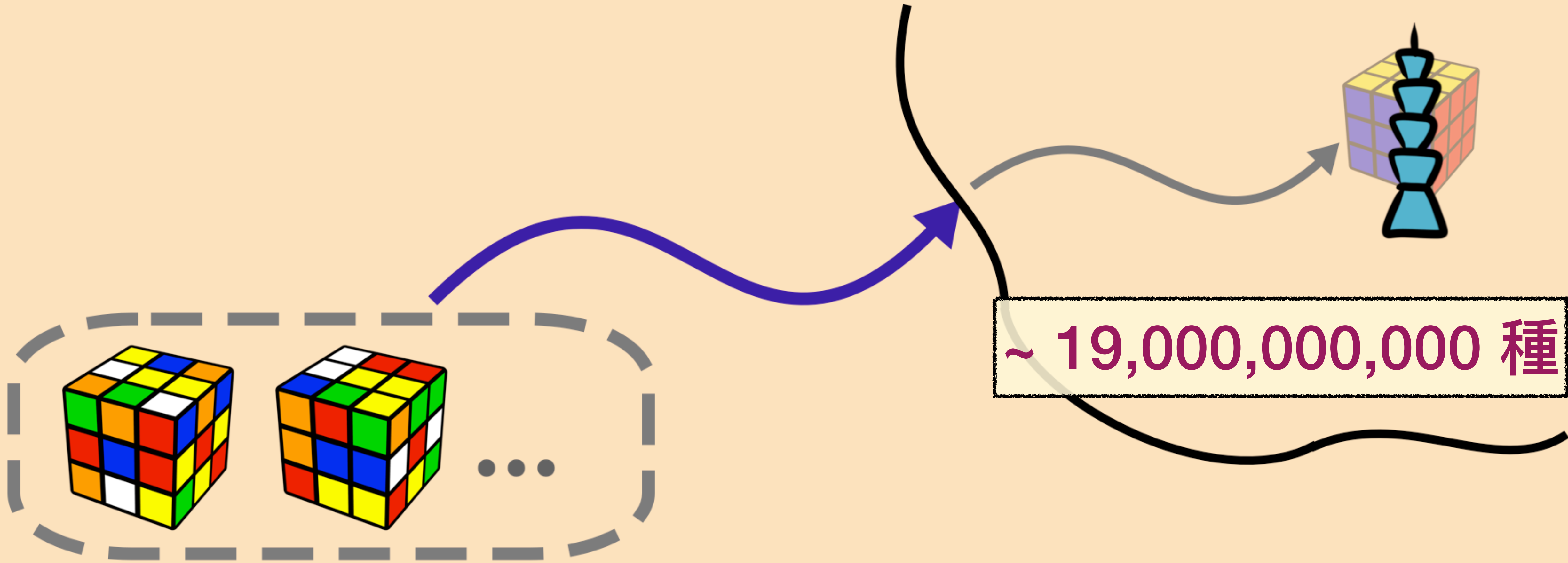
$$x_1 \cdot g \in H$$

$$x_2 \cdot g \in H$$

g

H





~ 19,000,000,000 種



~ 2,000,000,000 種

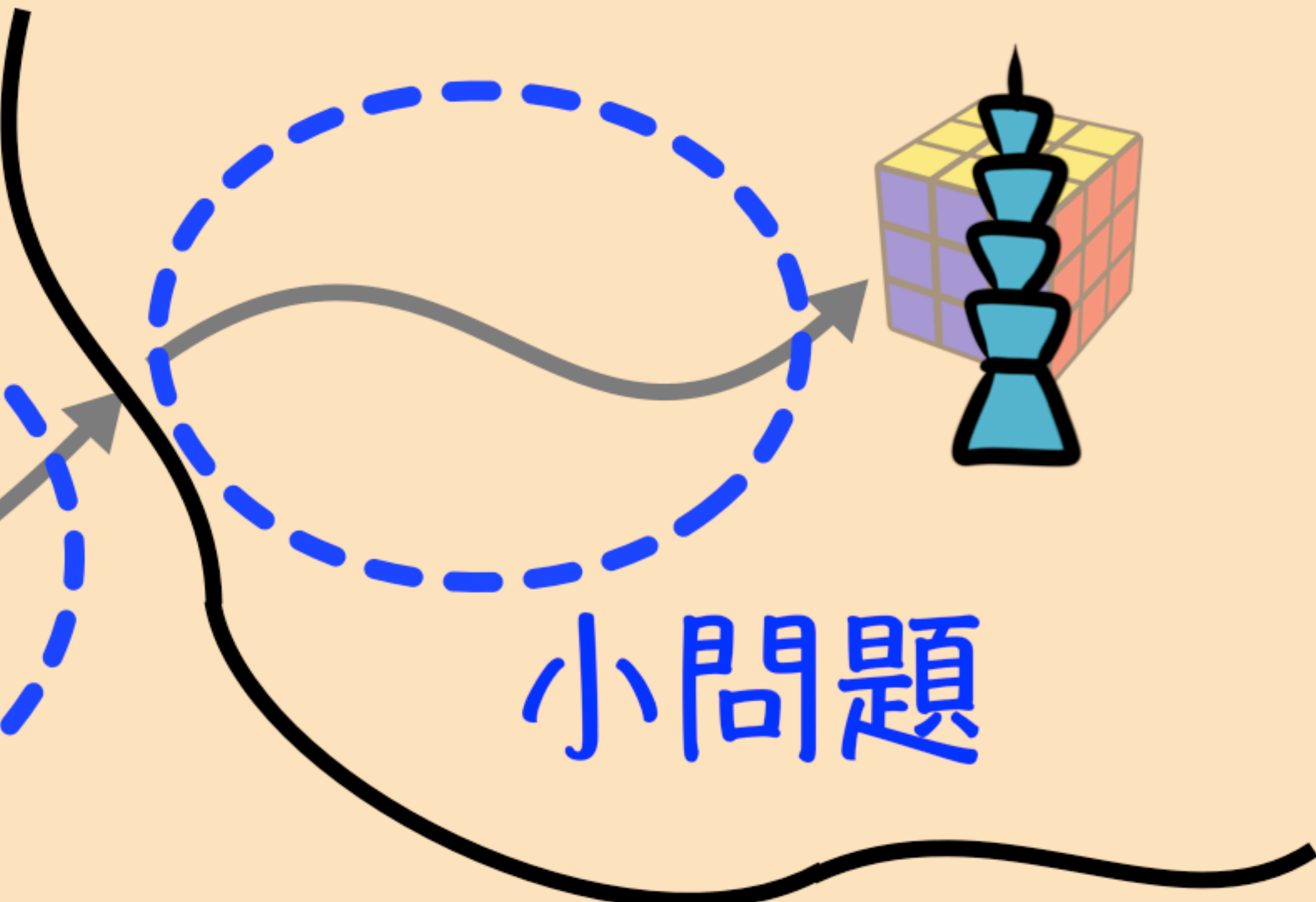
兩階段搜尋



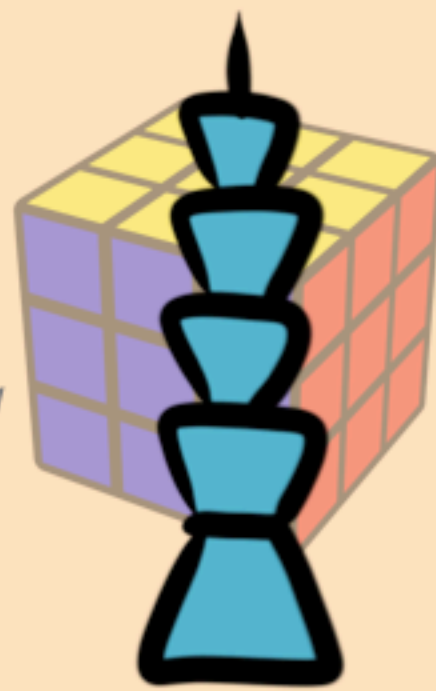
~ 2,000,000,000 種



小問題



小問題

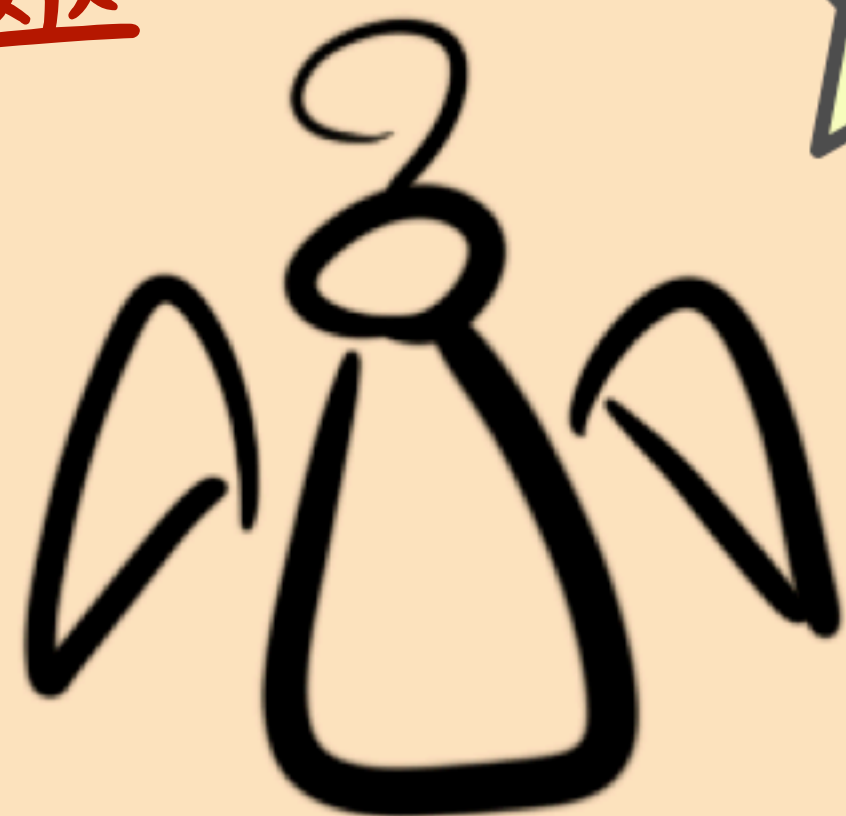


~ 19,000,000,000 種

還是億點點難

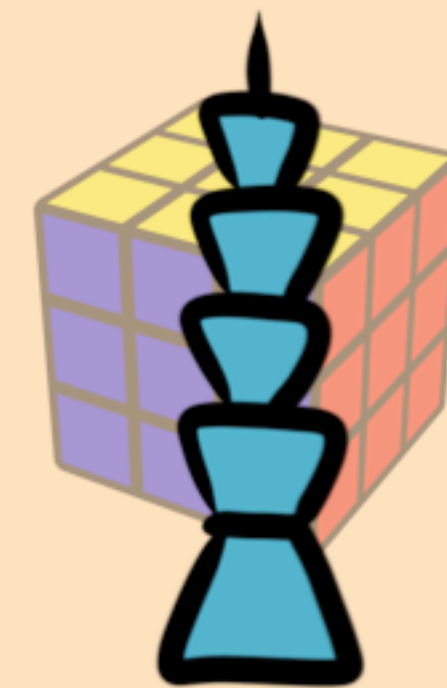
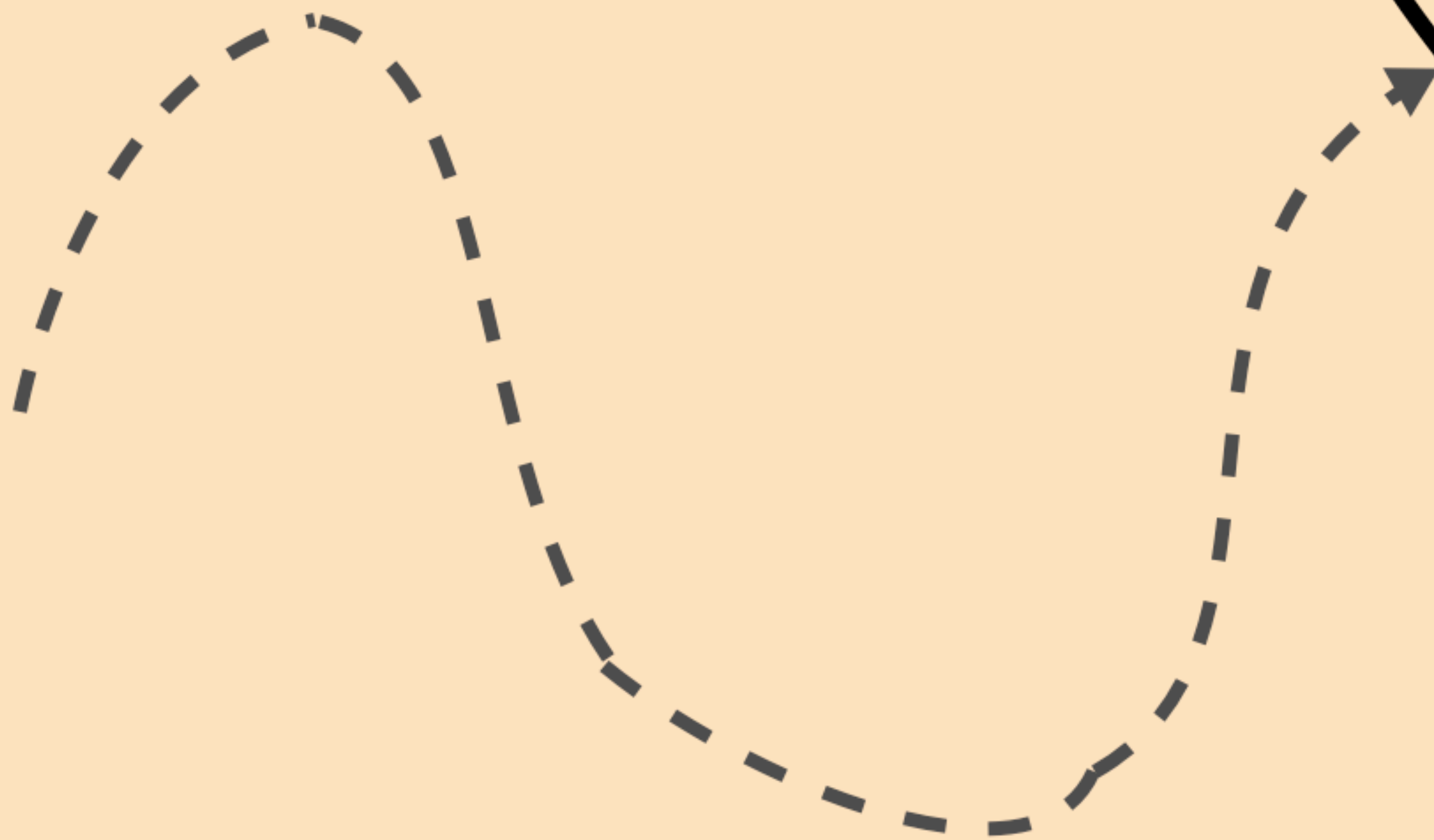
剪枝

剪枝小精靈

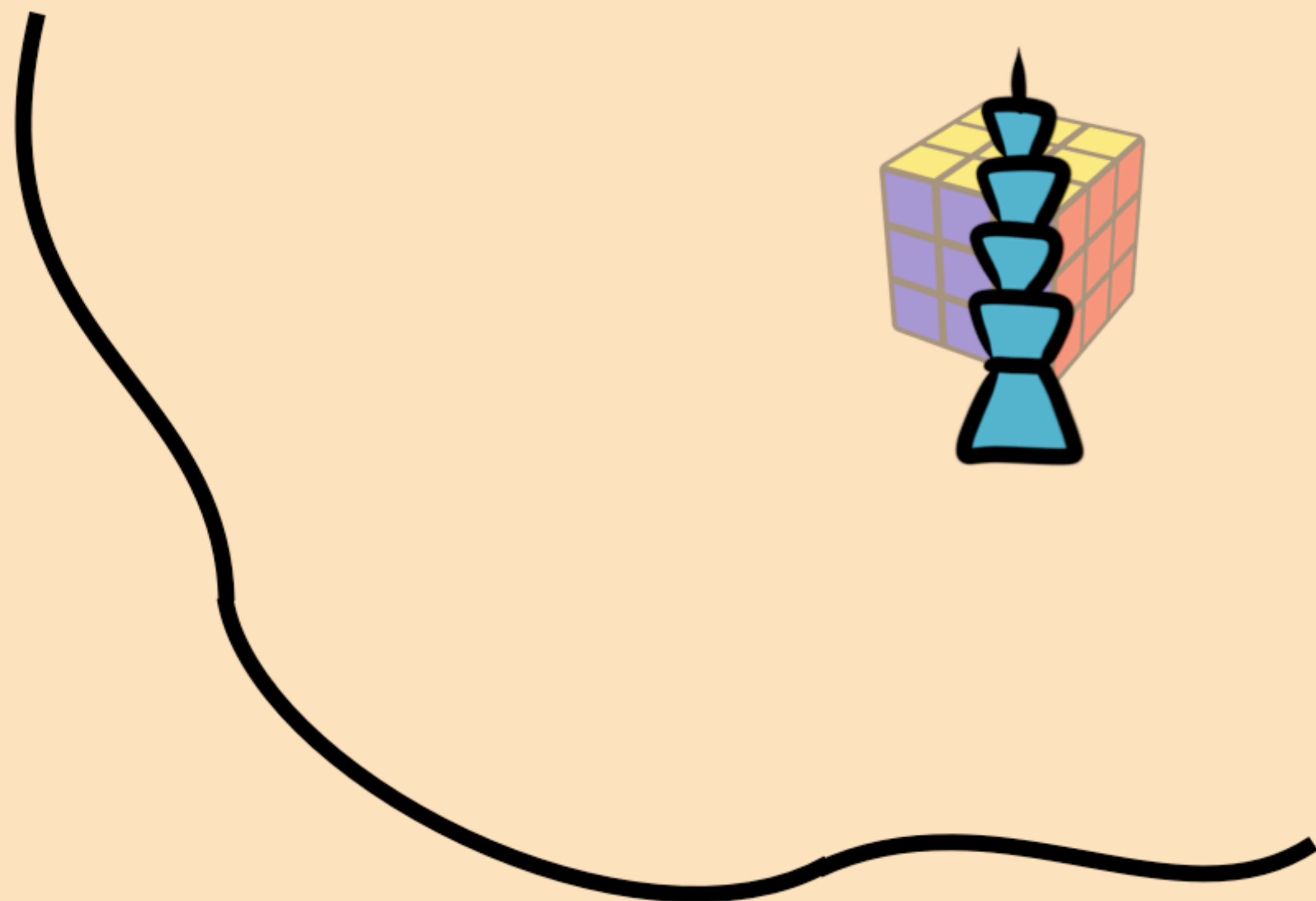
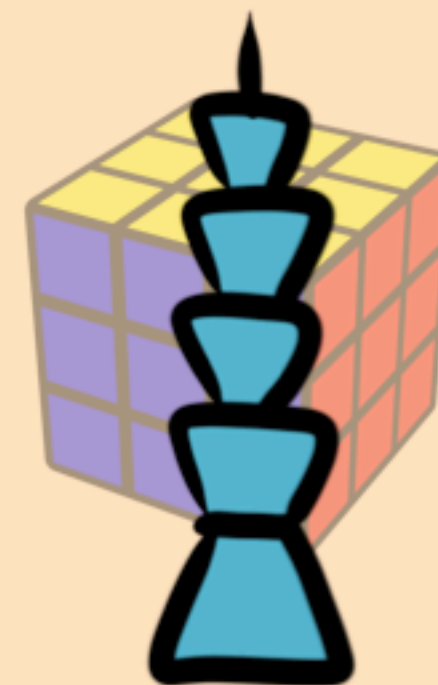
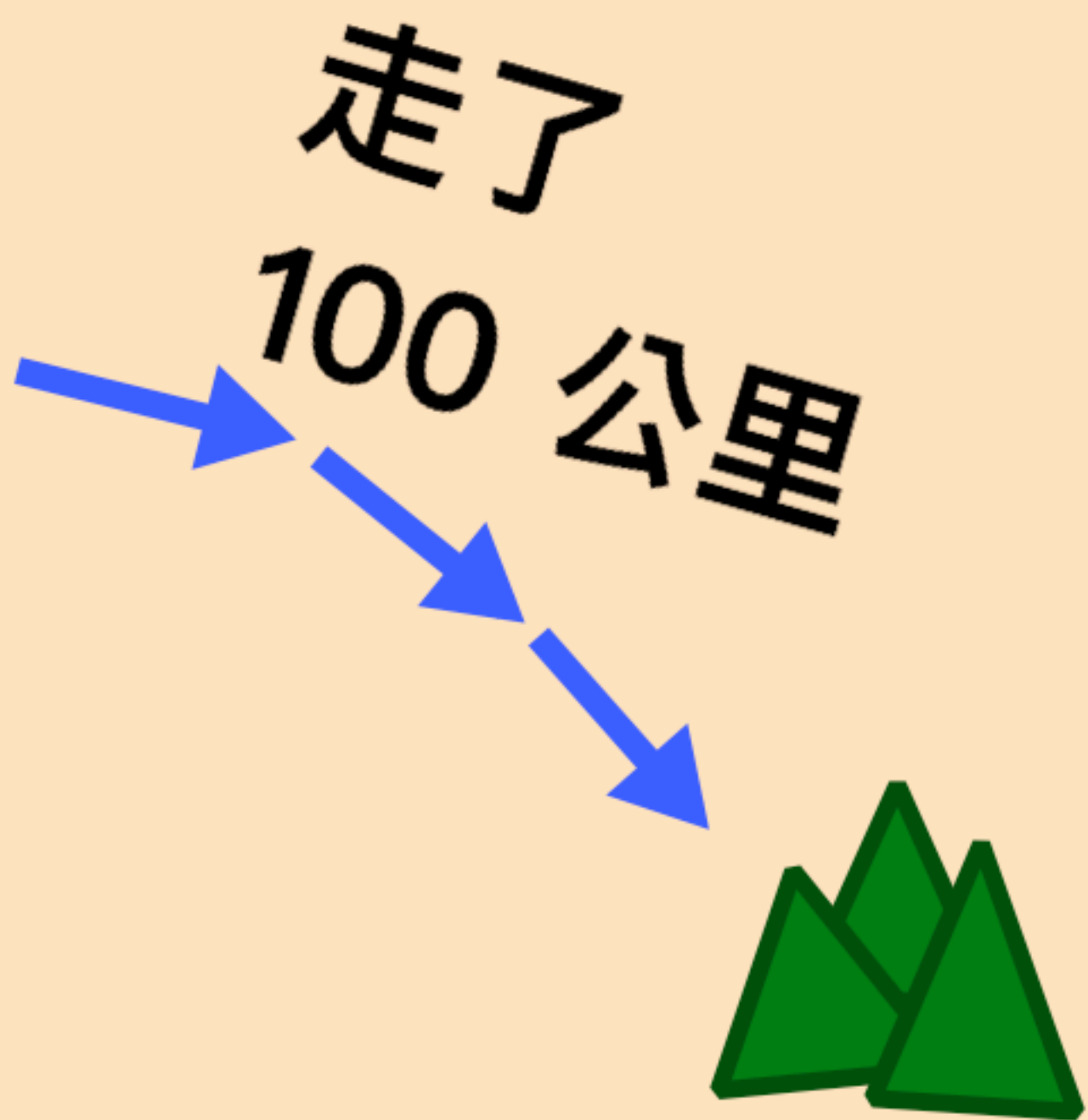


我知道你至少
還要走多遠

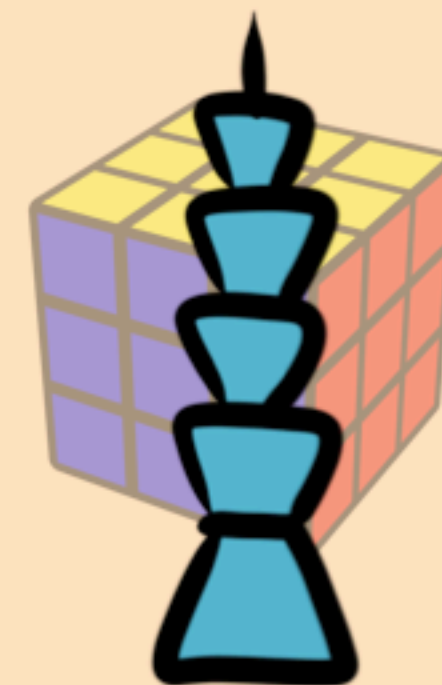
目標：300 公里內到達



目標：300 公里內到達



目標：300 公里內到達

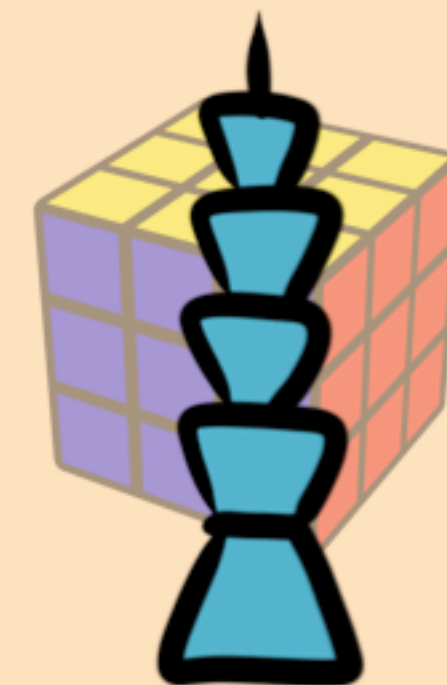
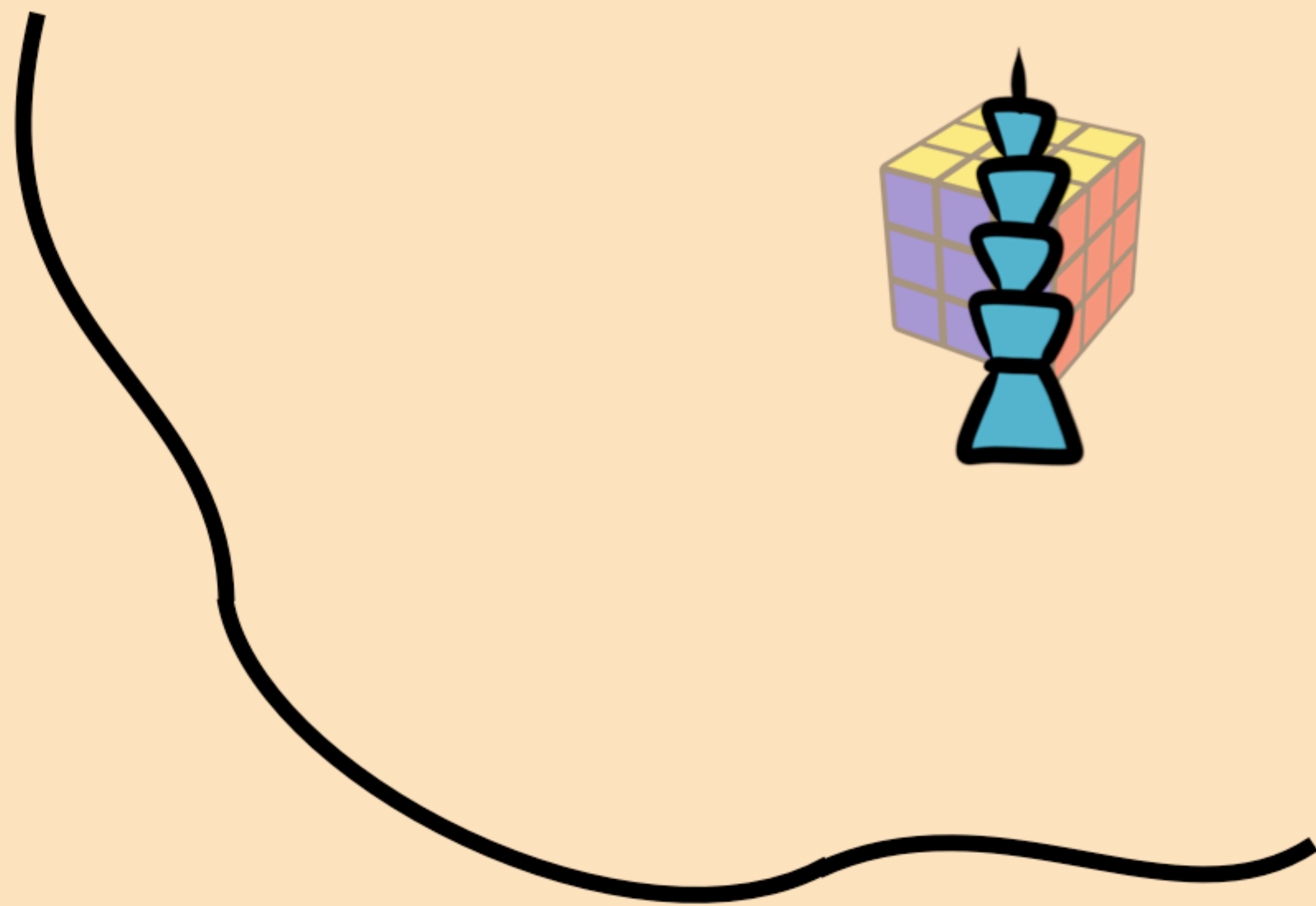
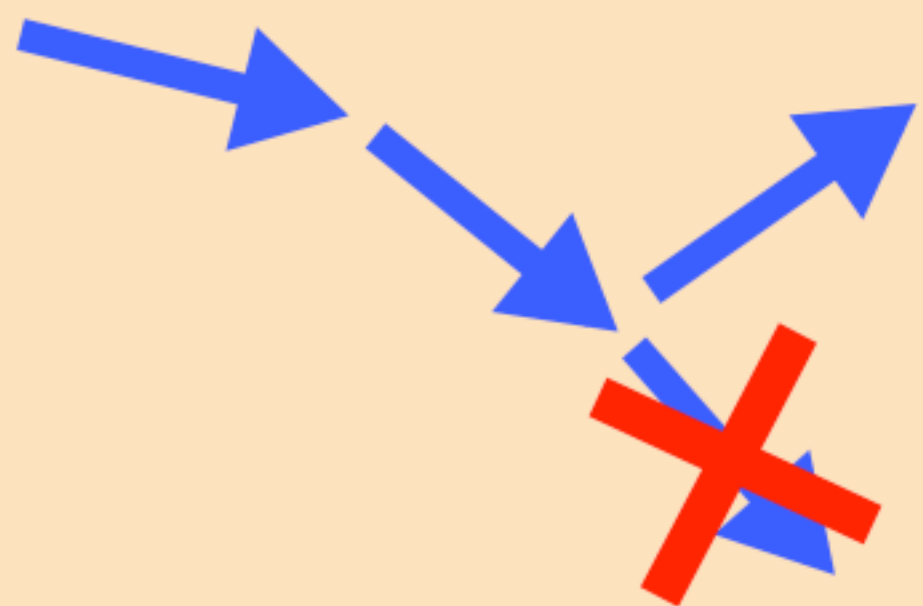


走了
100 公里



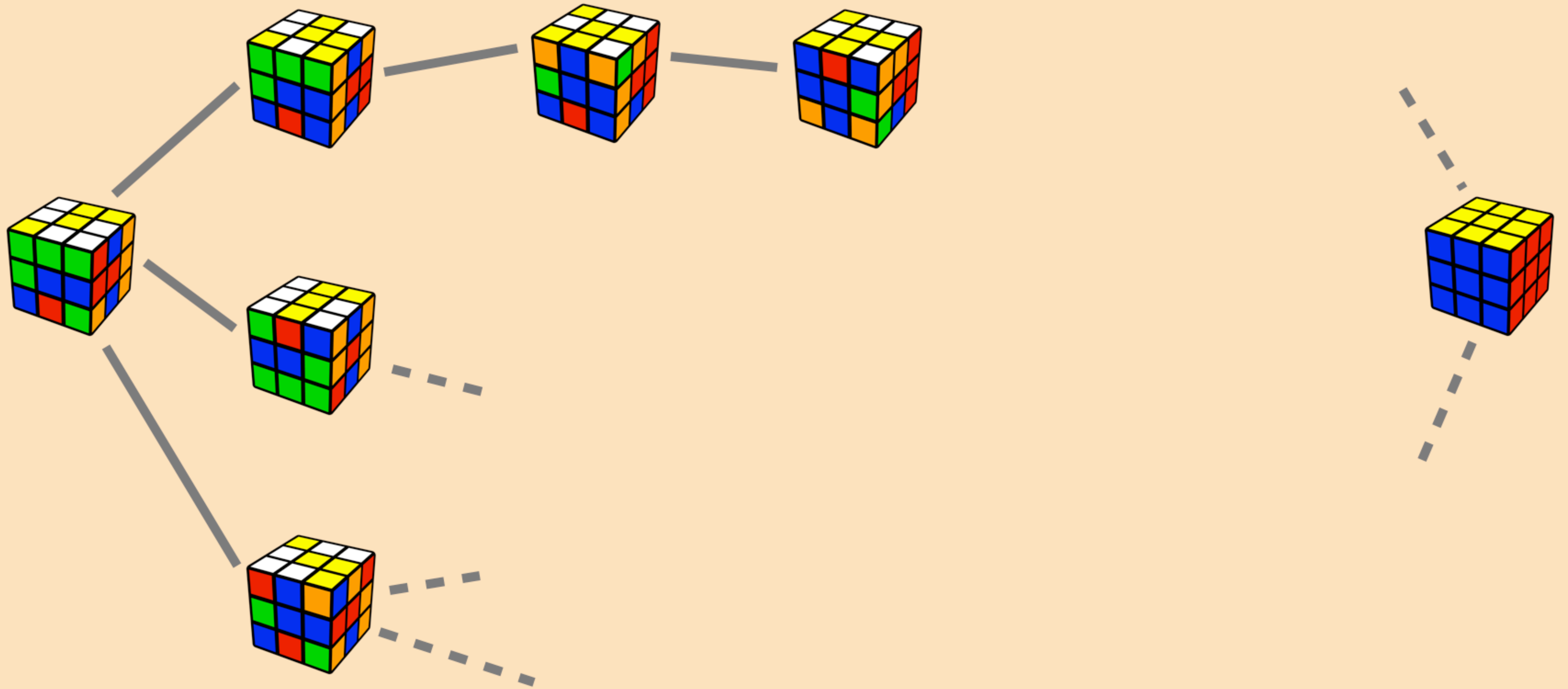
至少還要
250 公里

目標：300 公里內到達



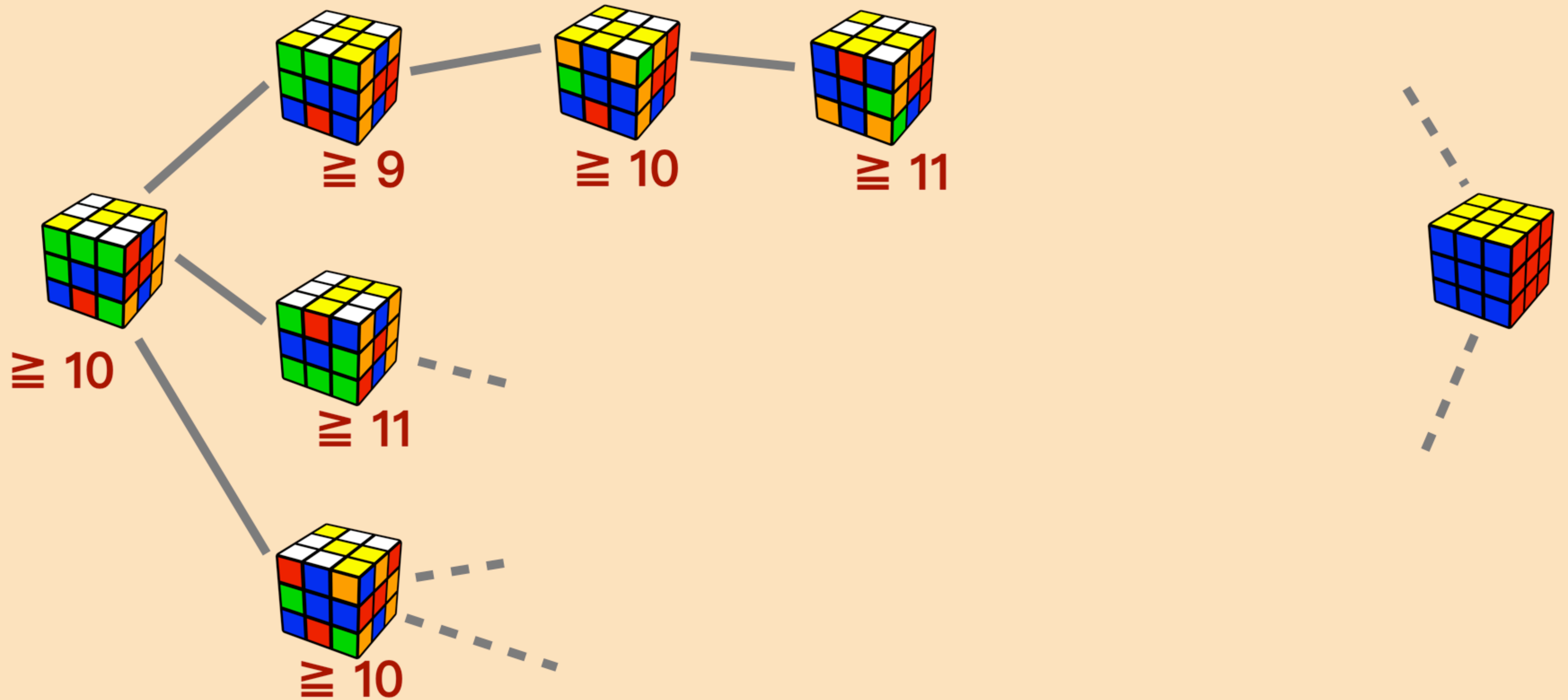
剪枝

預算：12 步內到目標



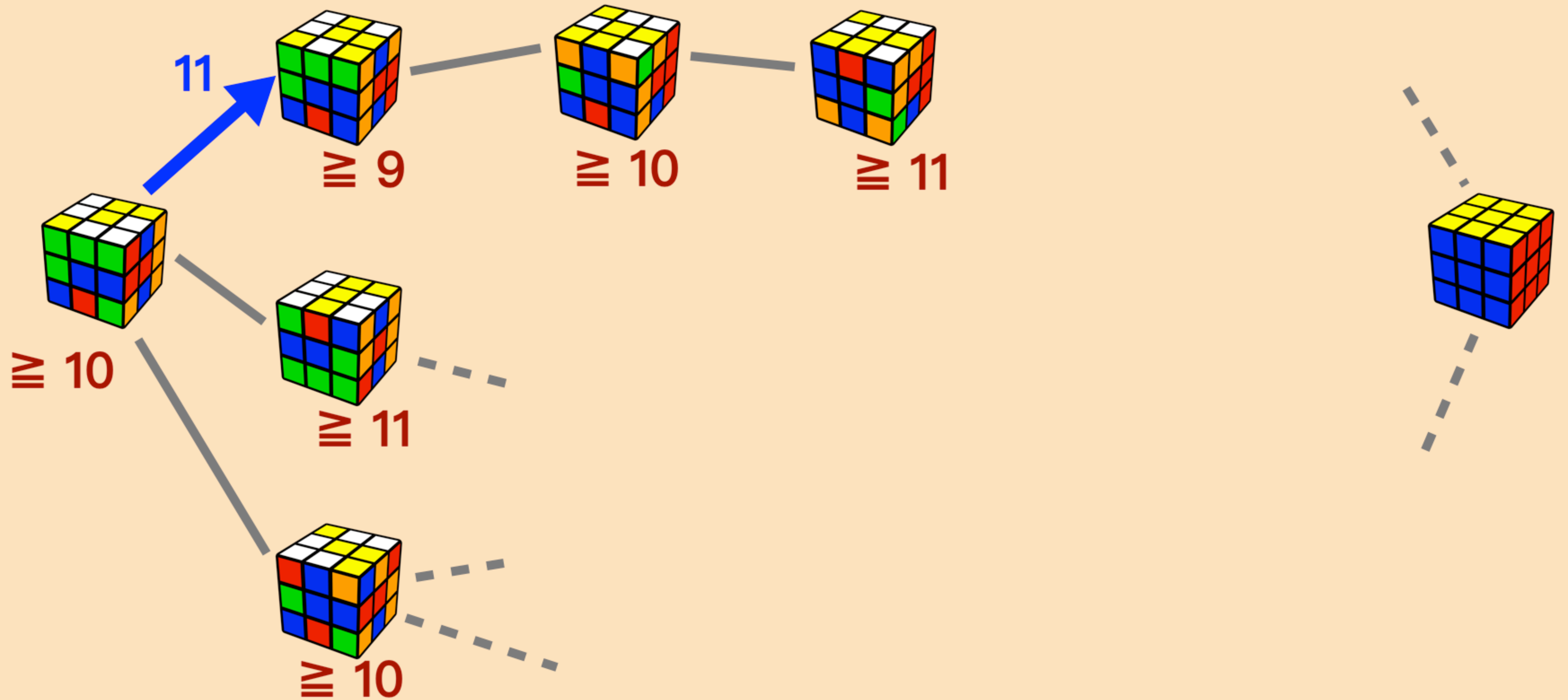
剪枝

預算：**12** 步內到目標



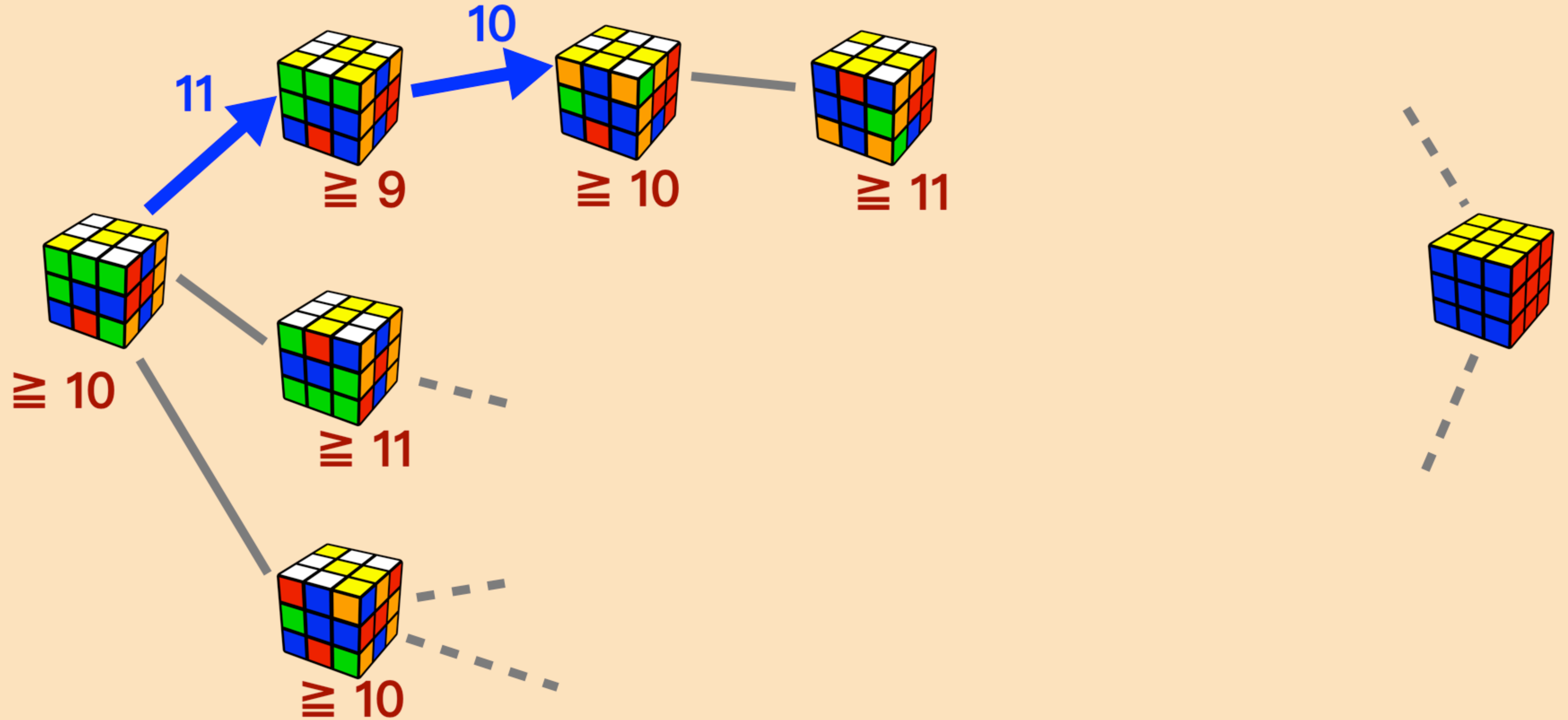
剪枝

預算：12 步內到目標



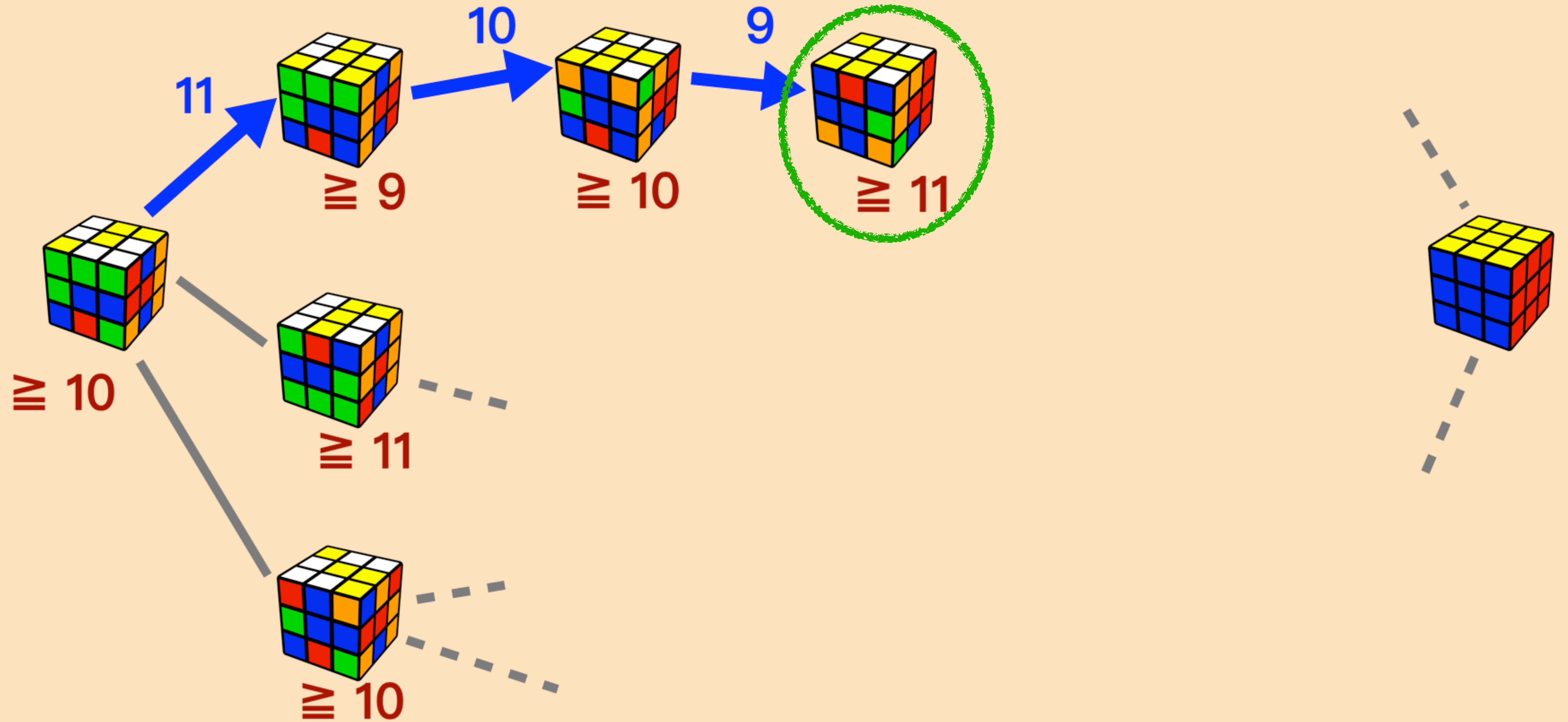
剪枝

預算：12 步內到目標



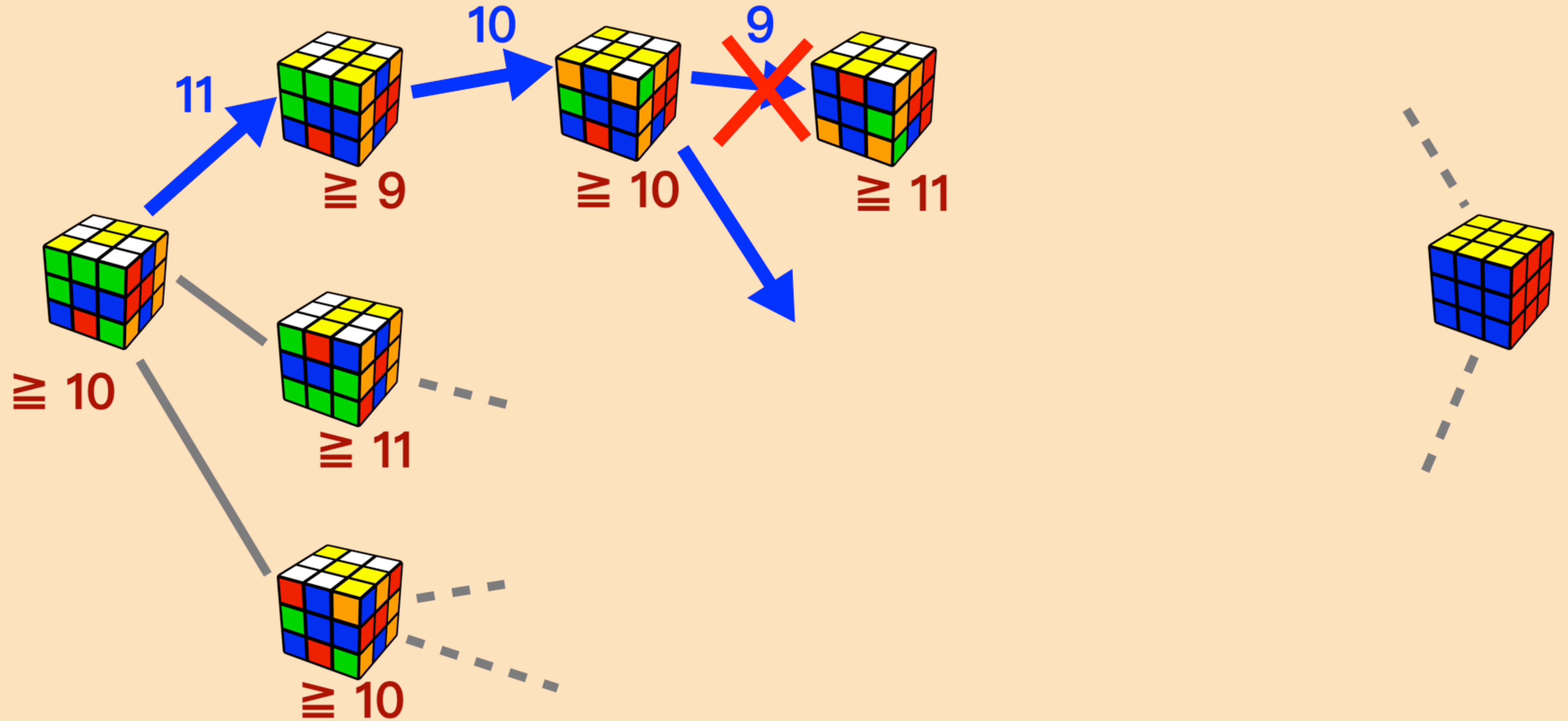
剪枝

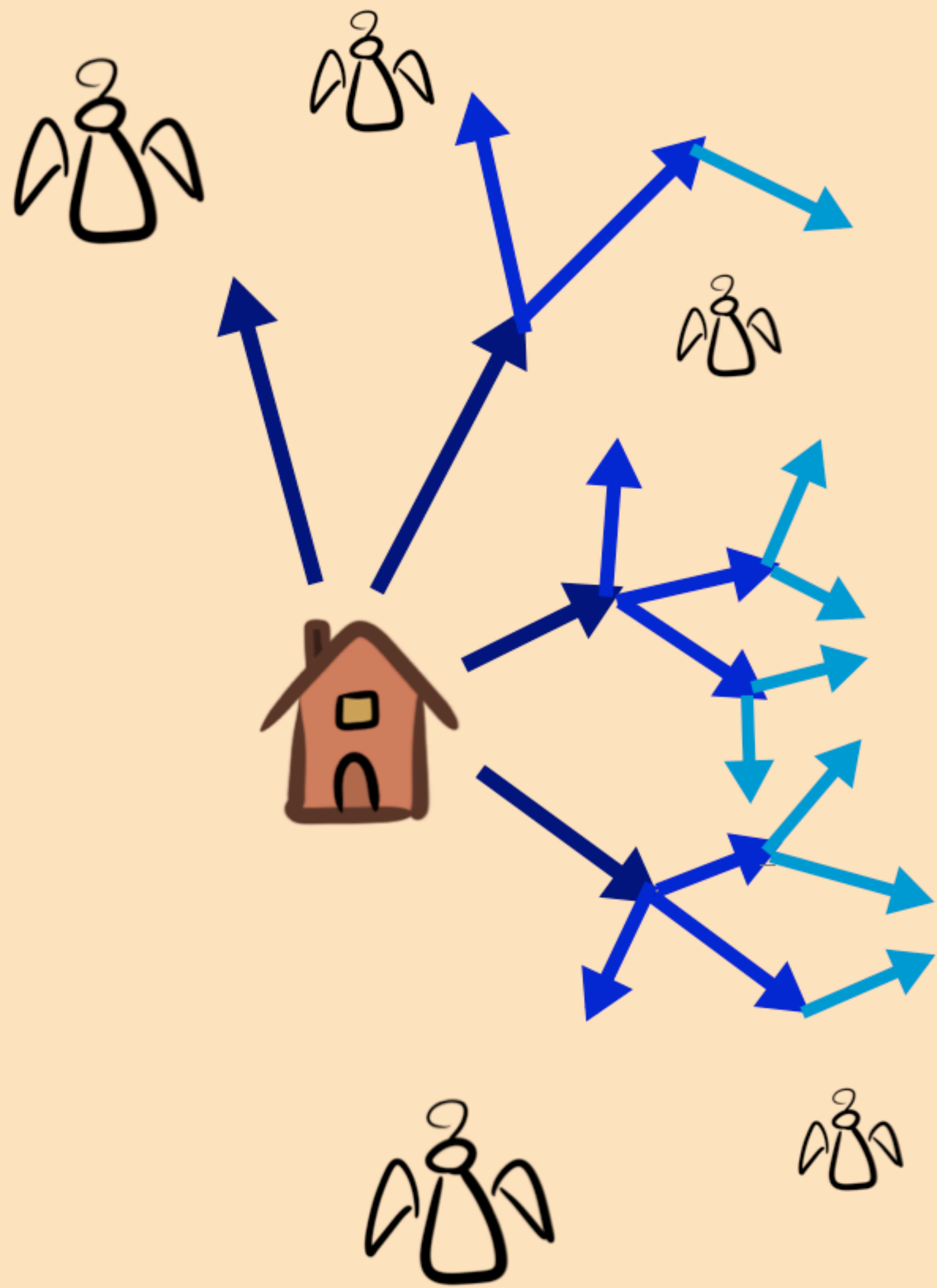
預算：12 步內到目標



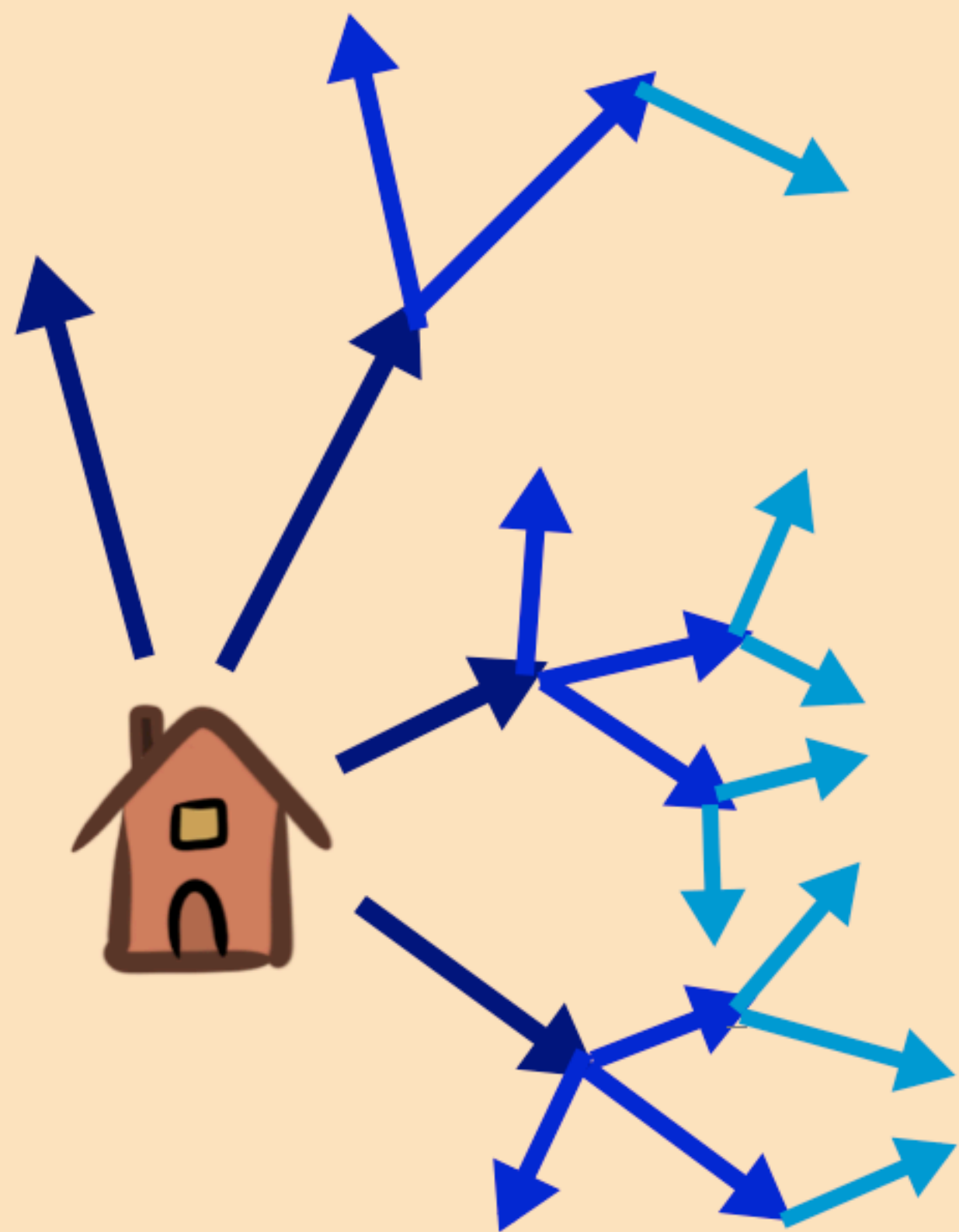
剪枝

預算：12 步內到目標





**「你好像很厲害，那直接教我
101 怎麼去就好啦」**

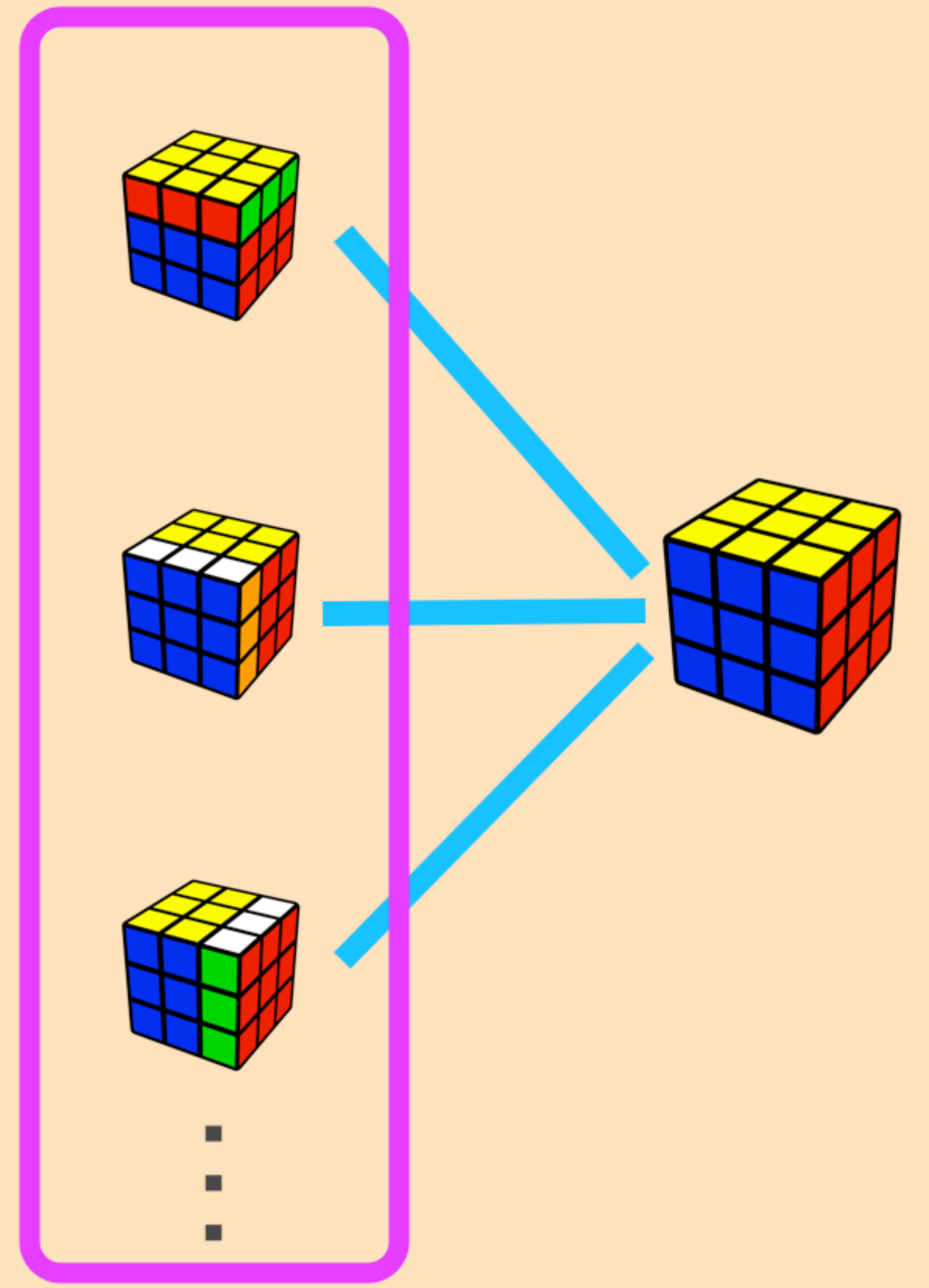


但我其實不認得
路怎麼走嘢！

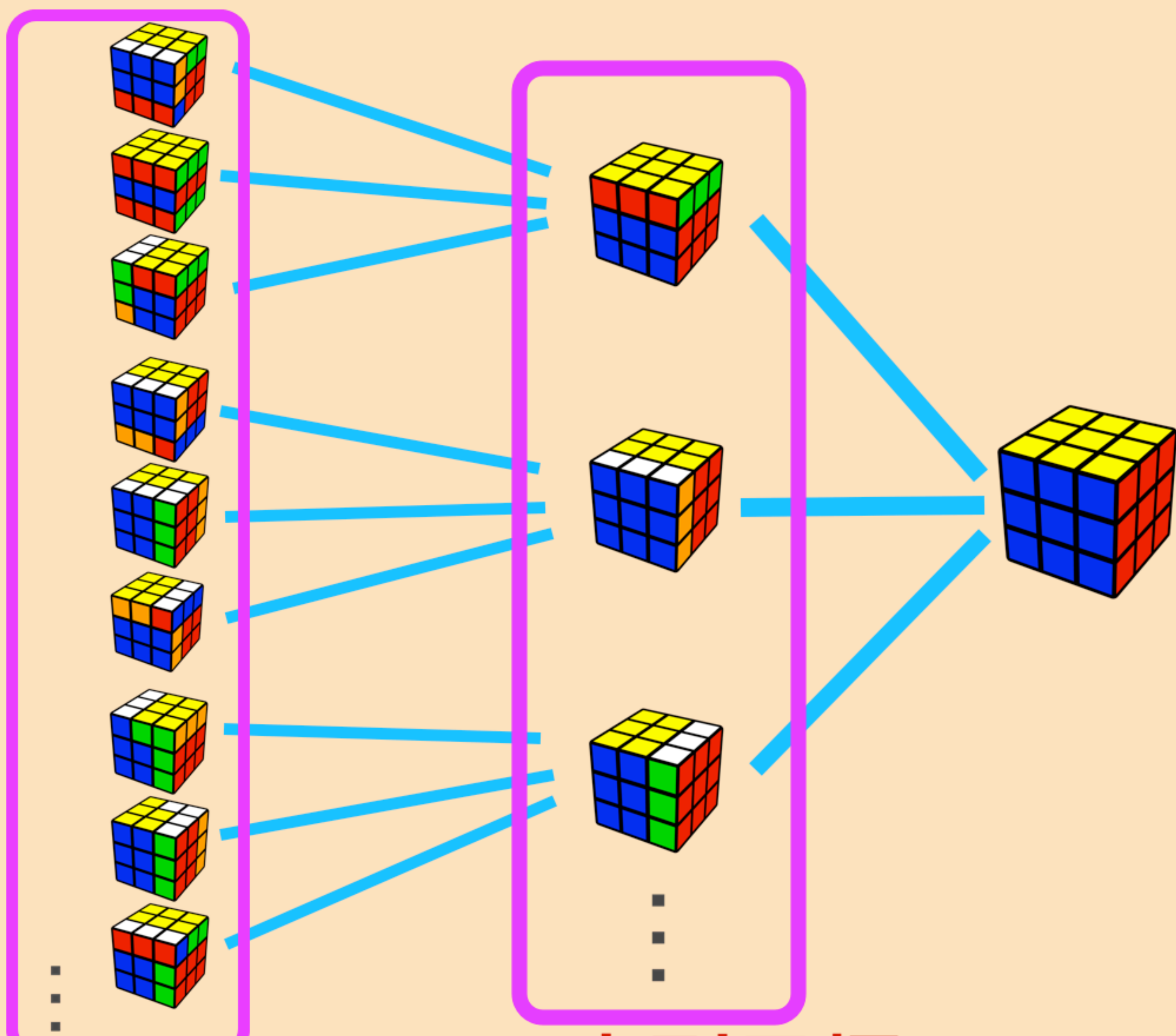


倒著走迷宫





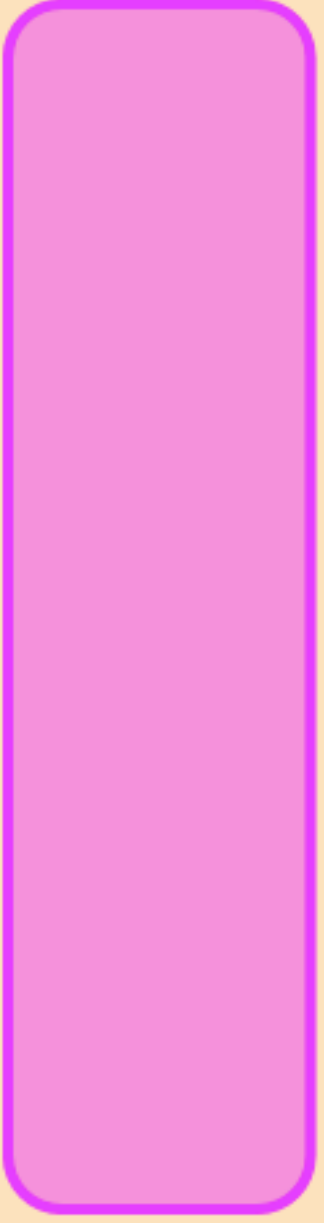
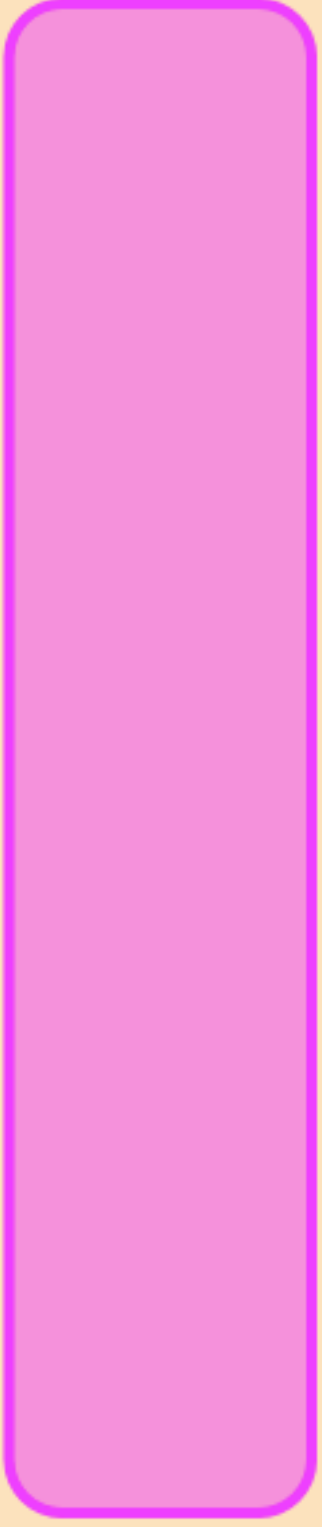
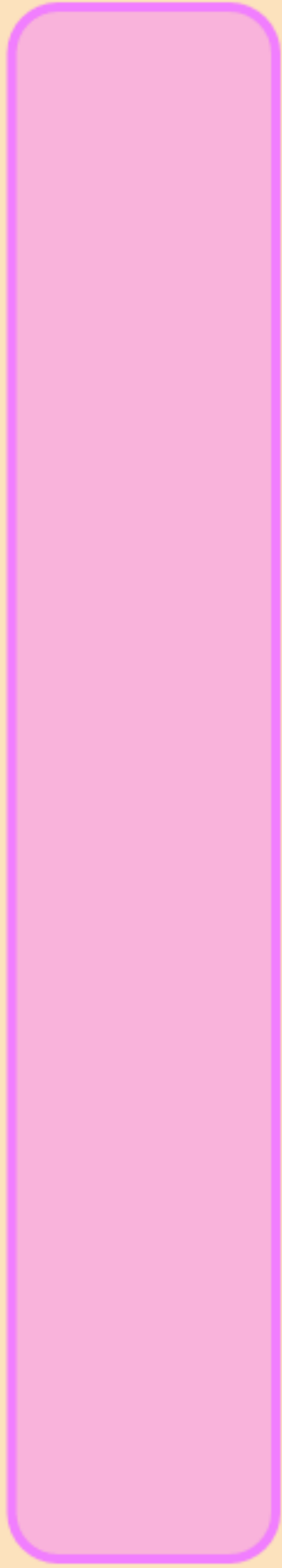
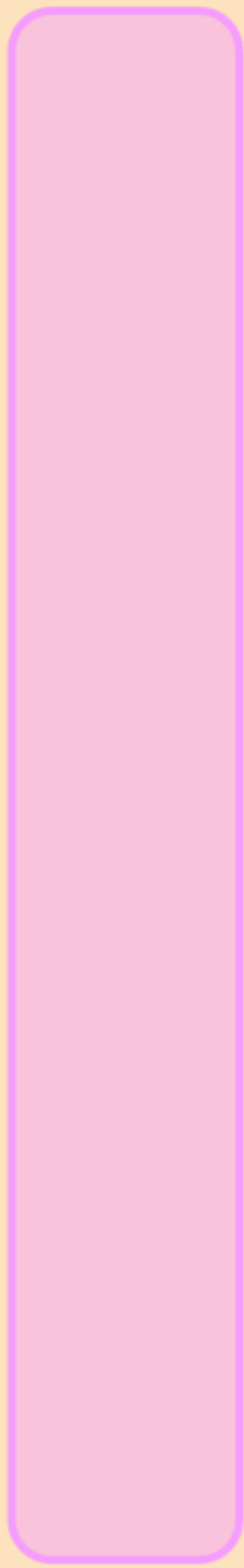
1 步到目標



2 步到目標

1 步到目標

...

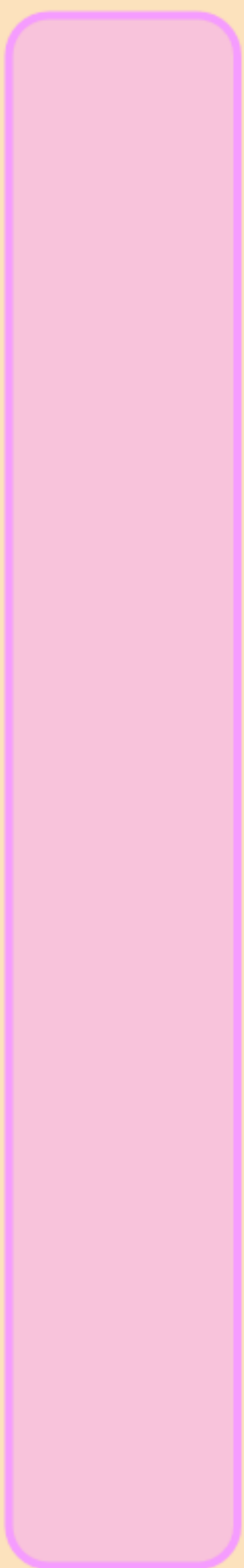
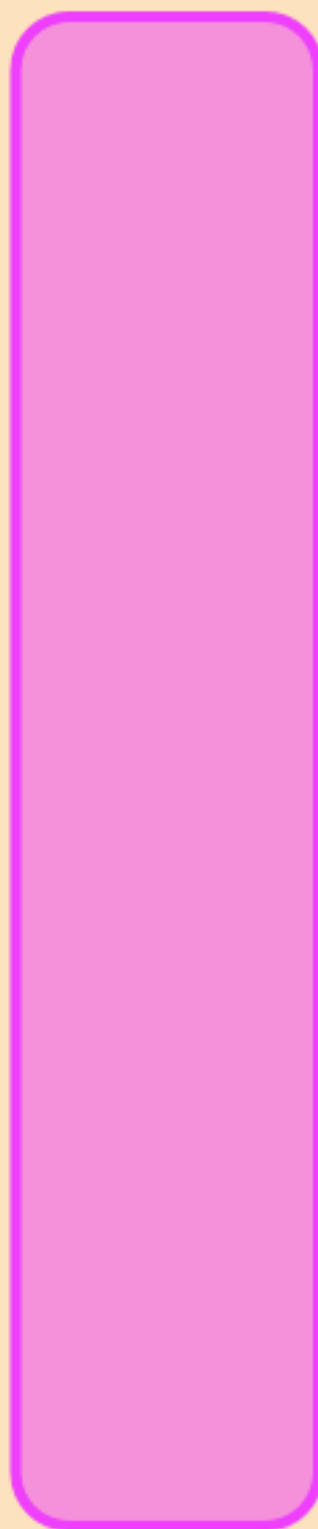
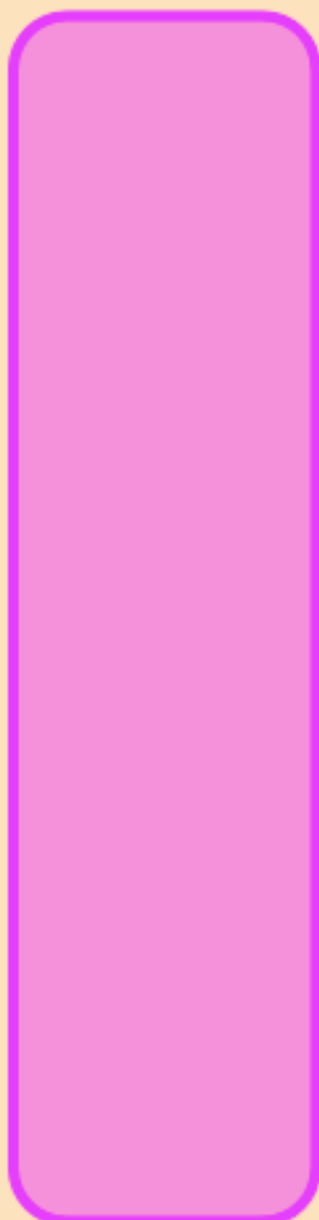


4

3

2

1



1

2

3

4

why not??

距離目標5步



= 5



準確 = 背不完

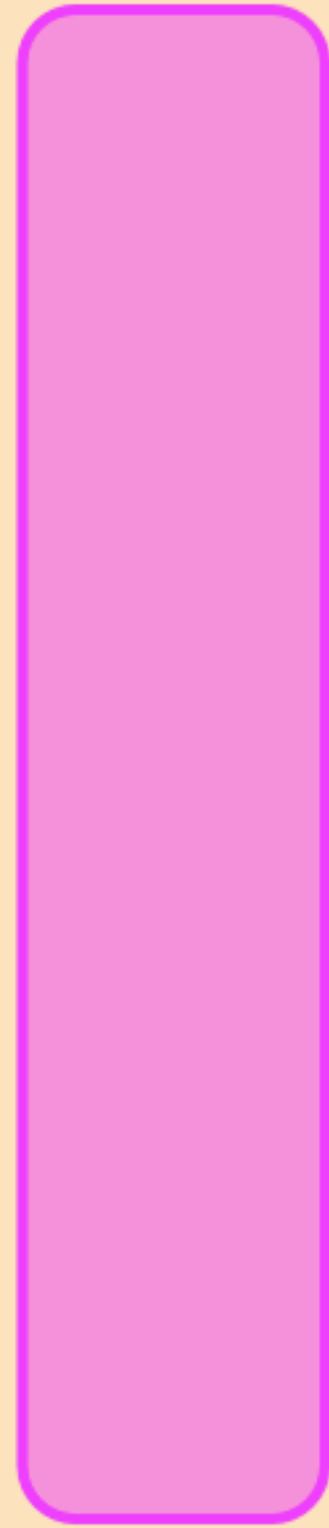
(分別有 2G 和 19G 種位置)



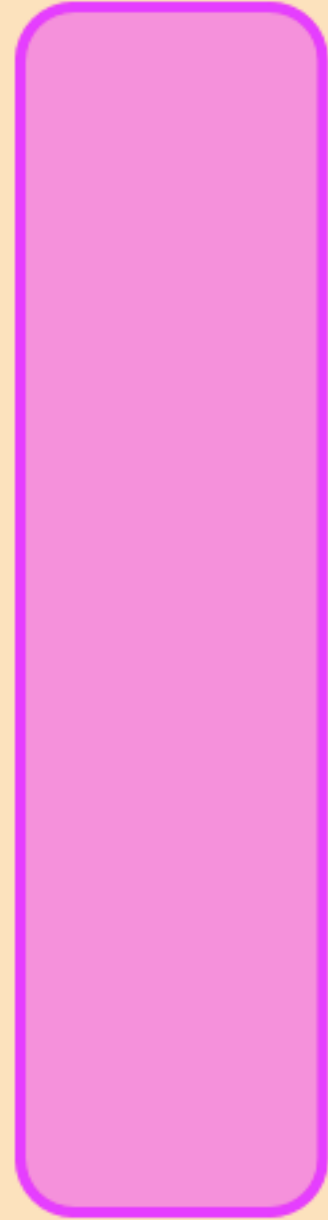
4



3



2



1



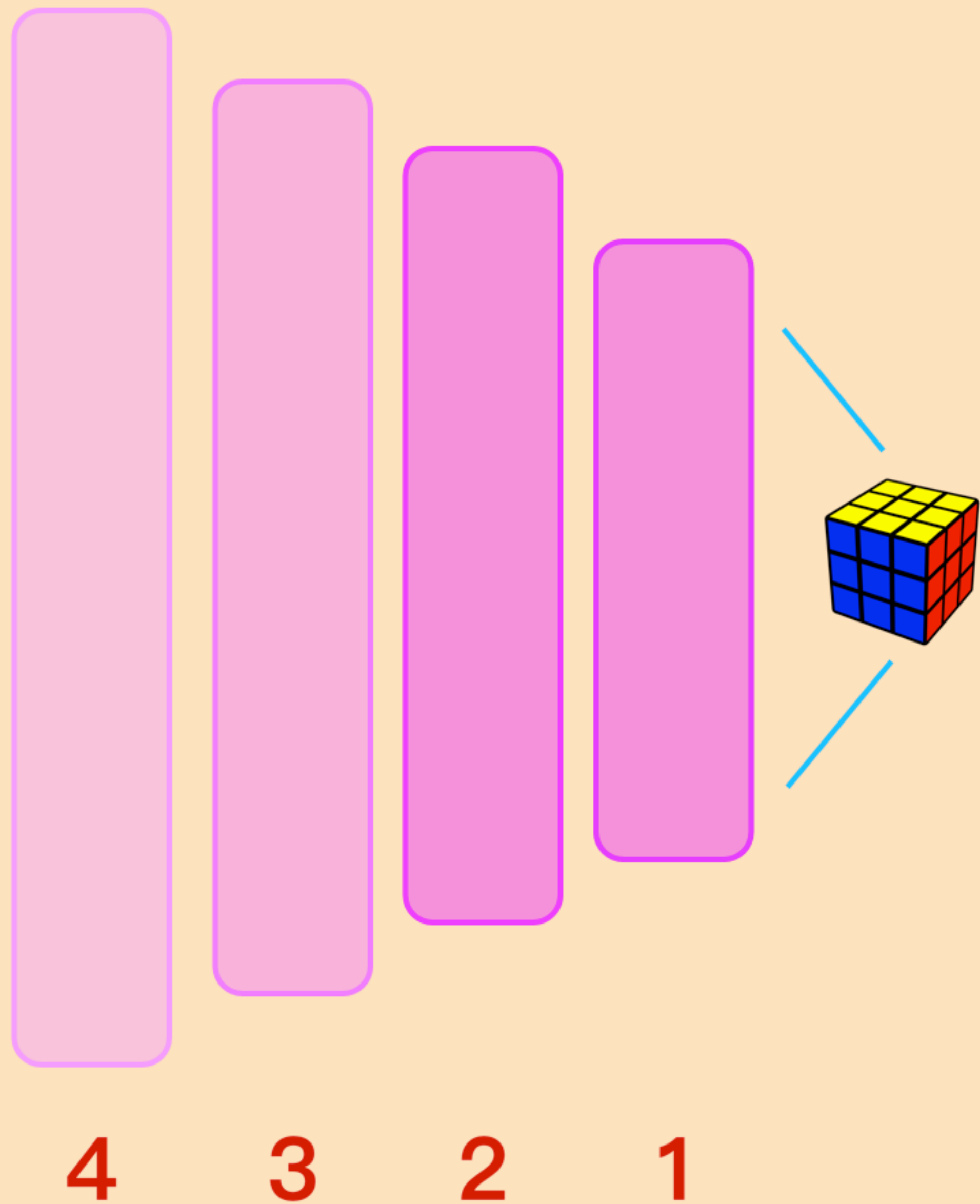
距離至少目標5步



$\cong 5$



估計就好



距離至少目標5步



老子懶得繼續回推

≥ 5

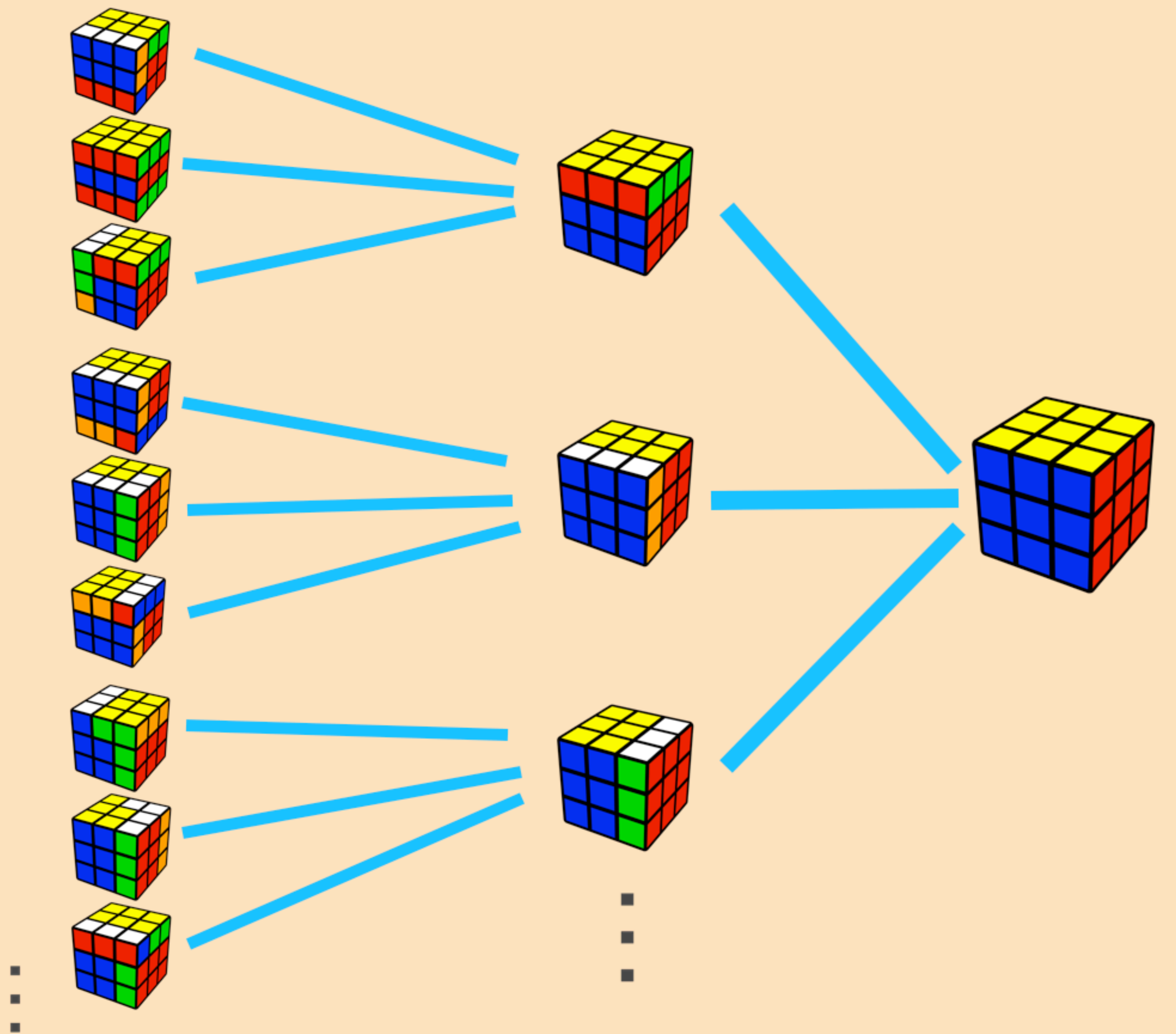
4

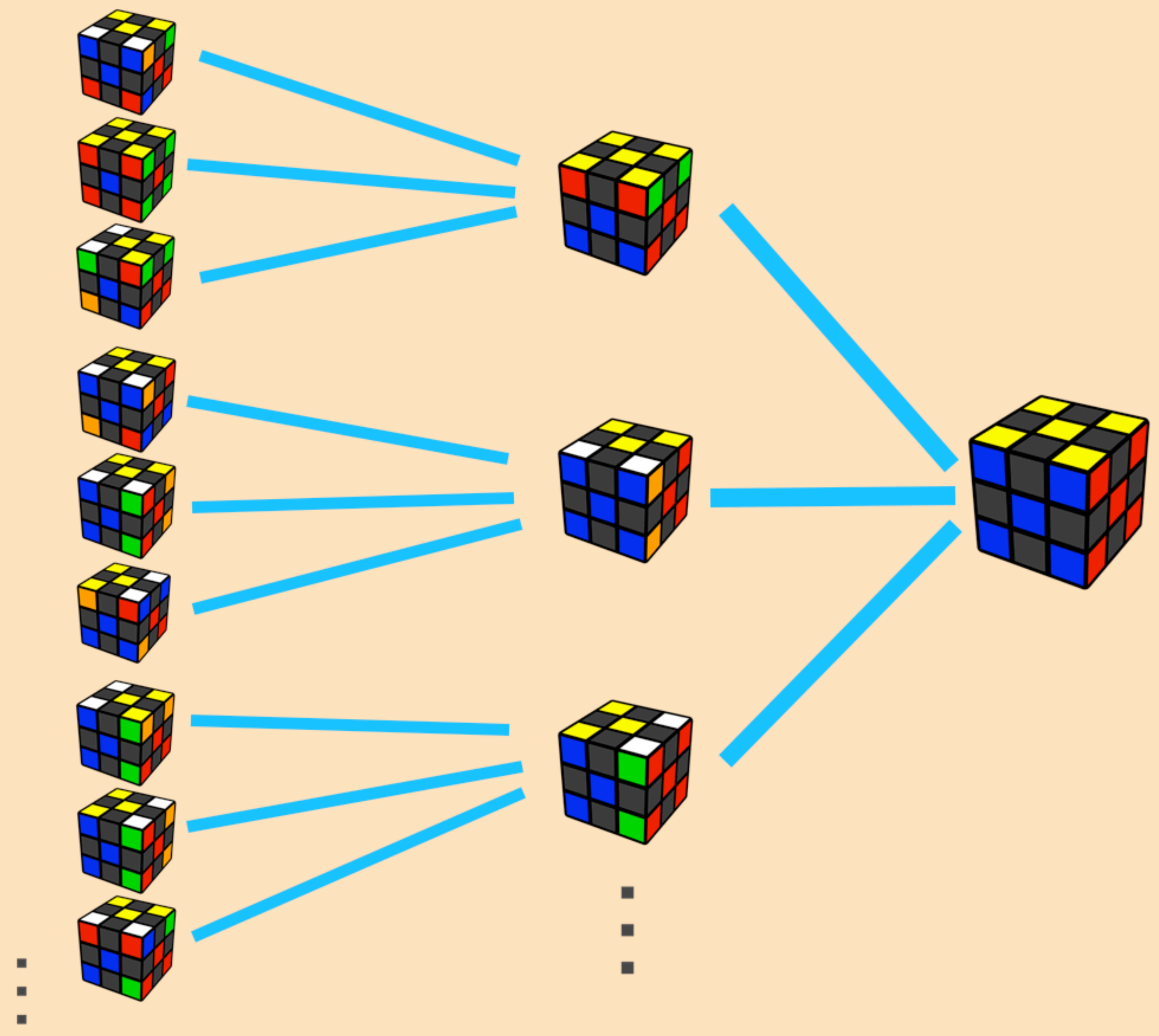
3

2

1







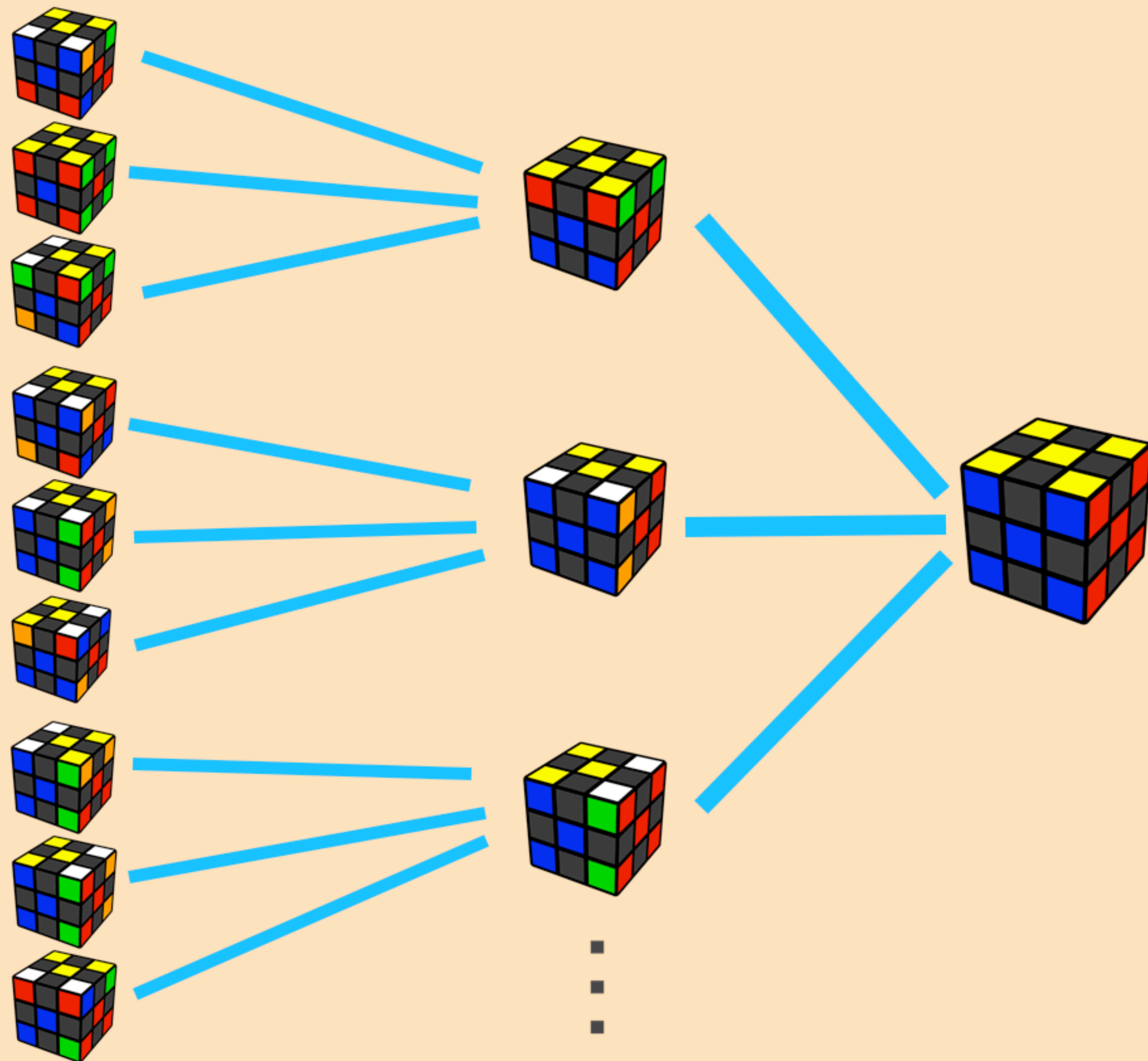
~~記憶空間 = 角塊 x 邊塊~~

記憶空間 = 角塊

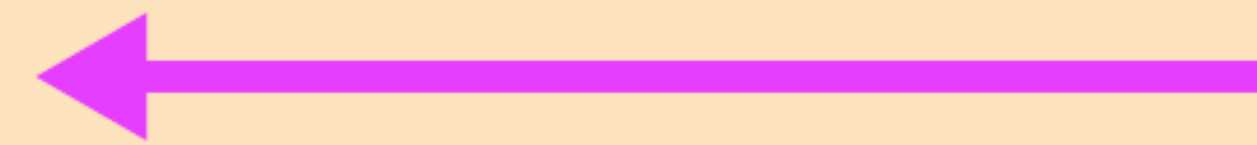
實際步數

\cong 剪枝 (角塊) 步數

(附註 Kociemba 不是分角塊邊塊，
此為示意)



BFS 預建 pruning table



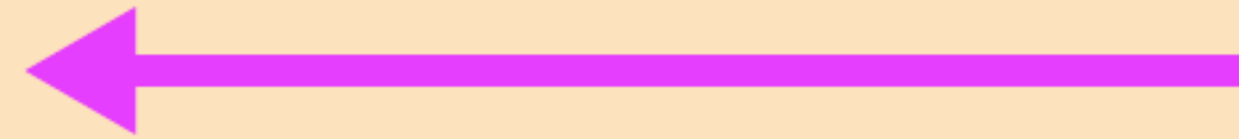
預先背哪些(種類)的方塊
好不好解

**(iterative deepening)
DFS + pruning**



被塞一顆方塊開始解時
即時搜尋

**BFS 預建
pruning table**

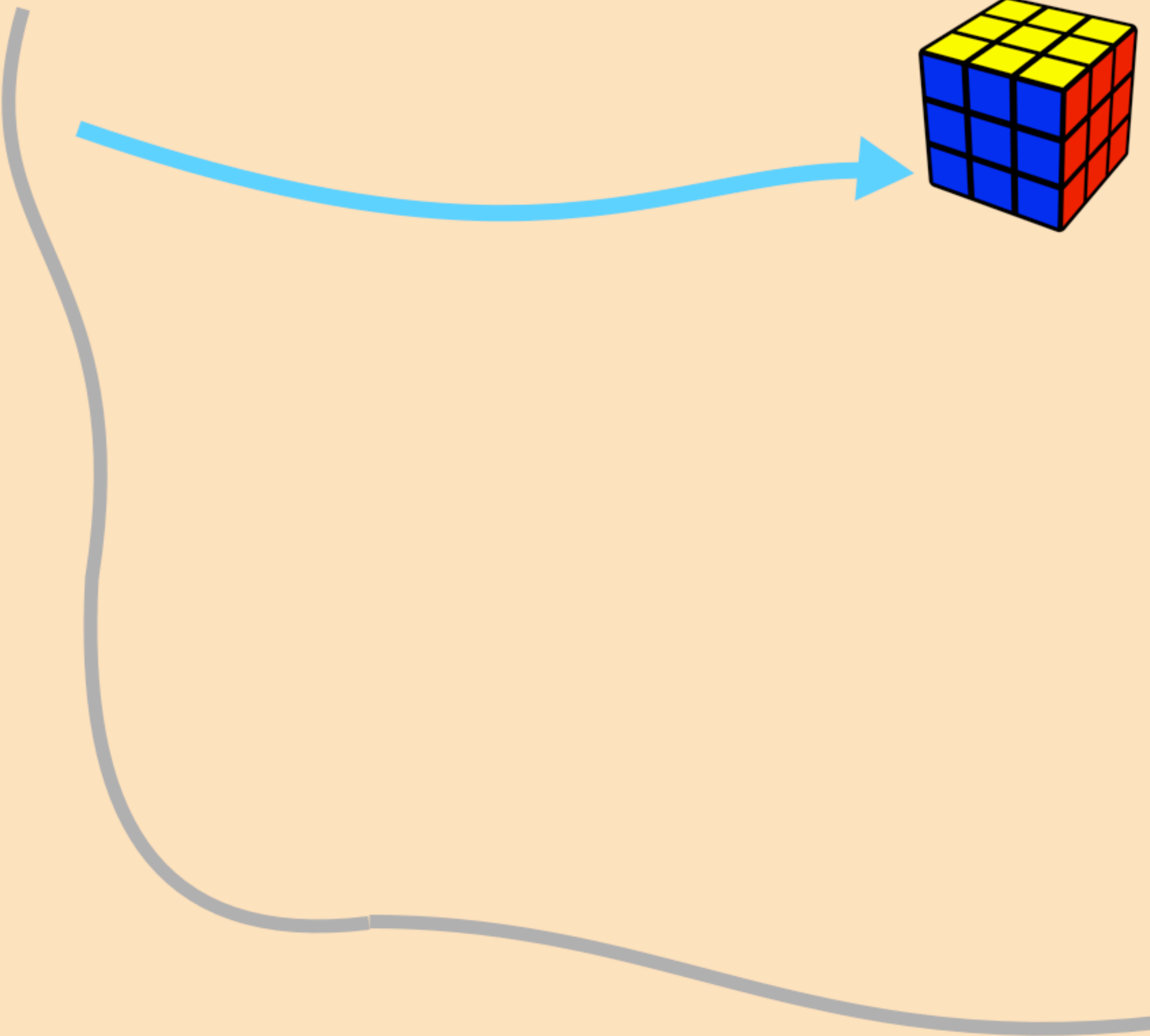
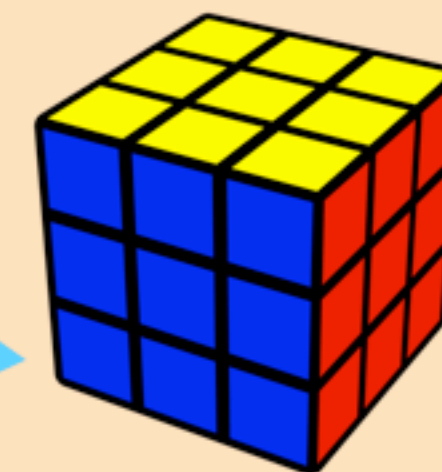


預先背哪些(種類)的方塊
好不好解

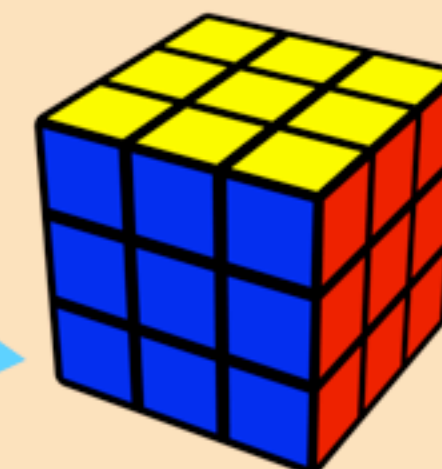
目標：從頭到尾 **21** 步內解完



7 步找不到
找到 **8** 步解

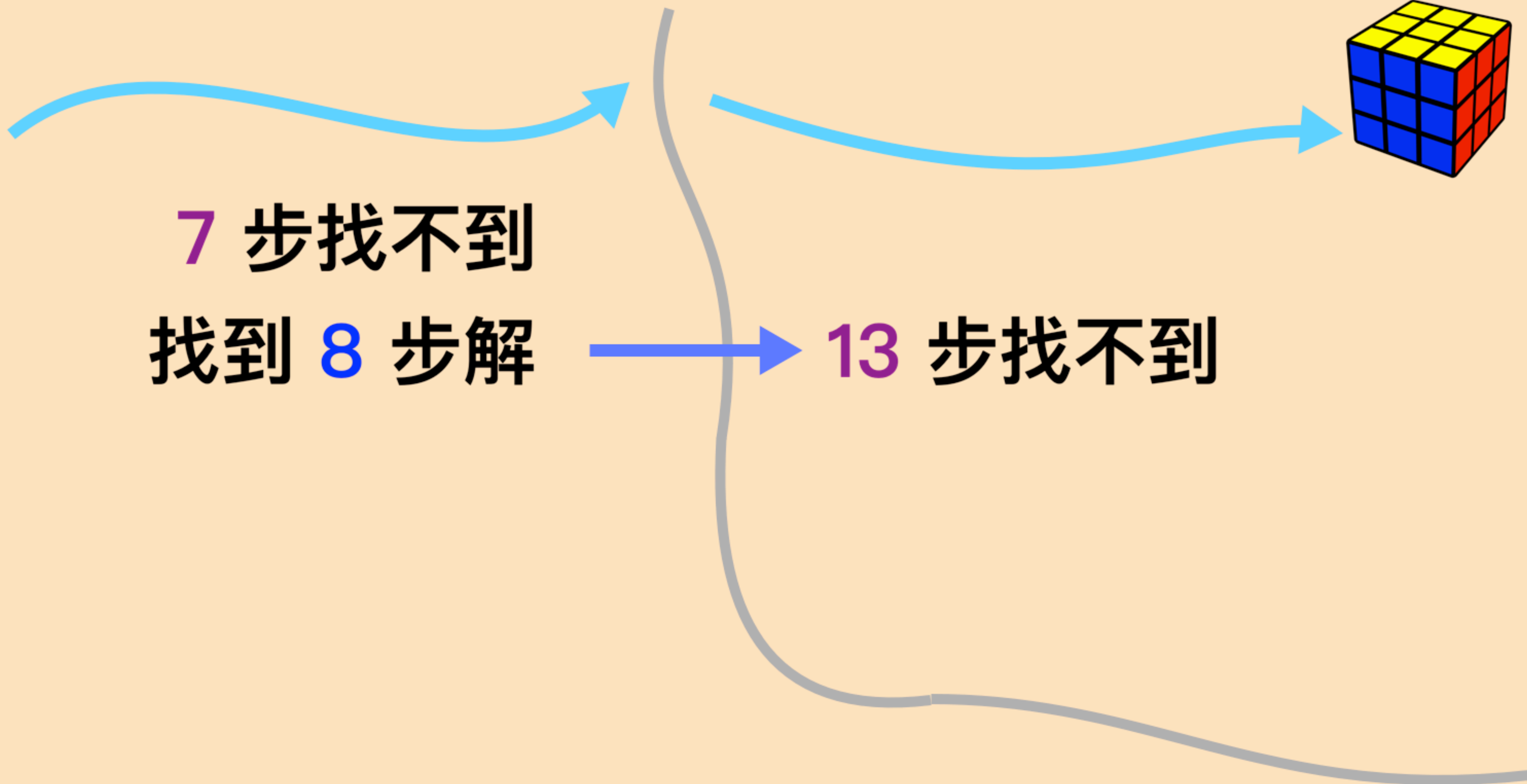


目標：從頭到尾 21 步內解完

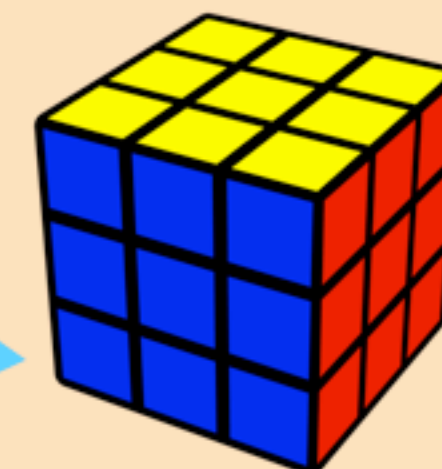


7 步找不到
找到 8 步解

13 步找不到



目標：從頭到尾 21 步內解完



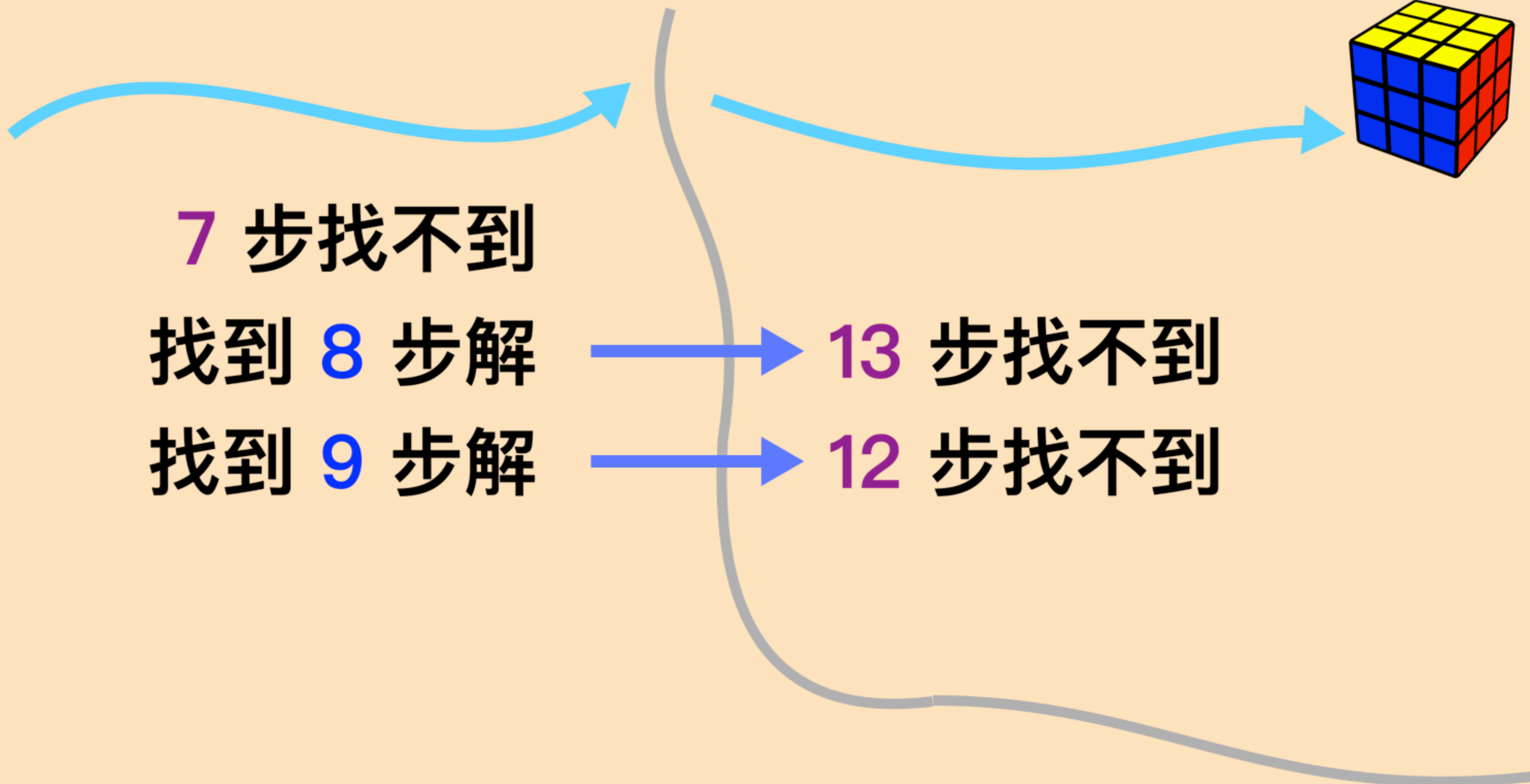
7 步找不到

找到 8 步解

找到 9 步解

13 步找不到

12 步找不到



目標：從頭到尾 21 步內解完



7 步找不到
找到 8 步解
找到 9 步解
找到 10 步解

13 步找不到
12 步找不到
11 步找到了!!

Iterative Deepening A* Search

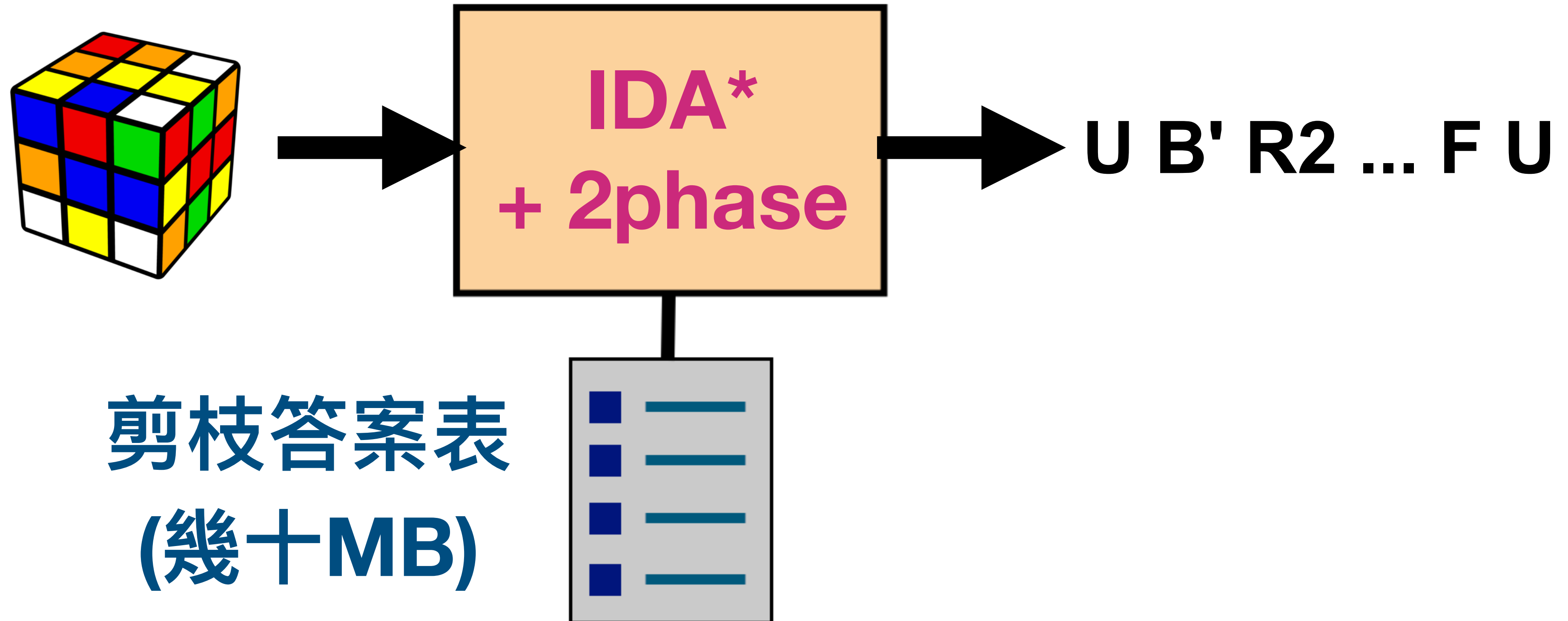
預算慢慢放鬆

heuristic /
informed /
pruning

強烈建議大家去 Kociemba 本人的網頁！

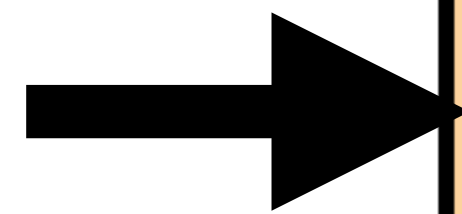
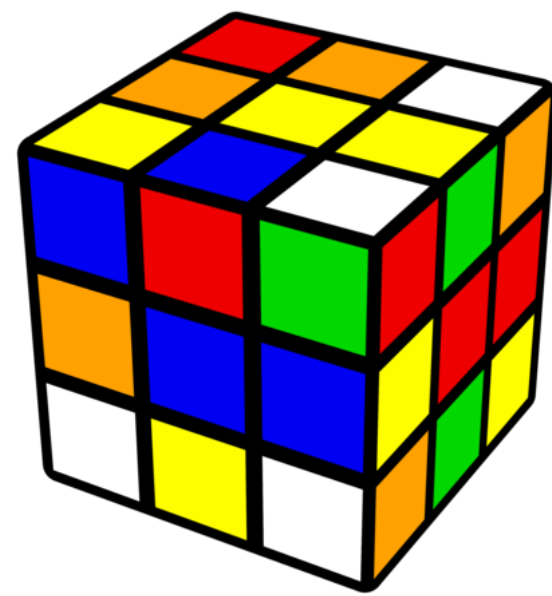
<http://kociemba.org/cube.htm>

演算法

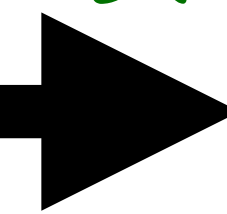


「電腦怎麼看得懂魔方？」

「怎麼只追蹤台北人特質？」

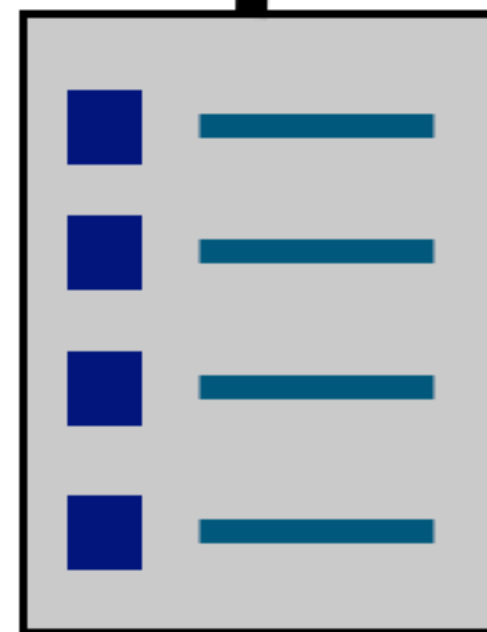


「電腦怎麼『轉』？」



U B' R2 ... F U

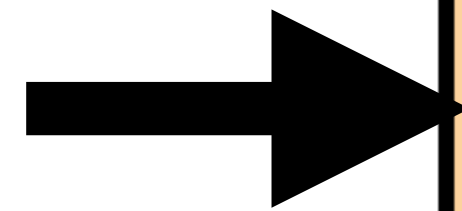
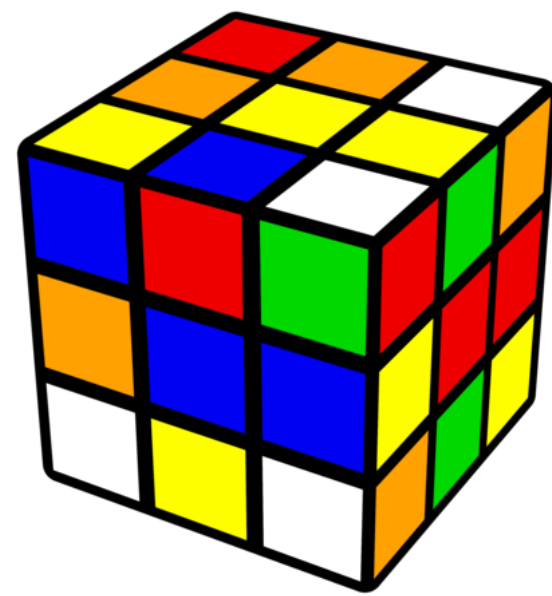
剪枝答案表



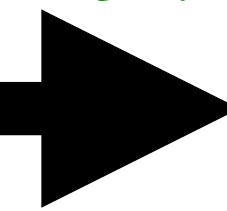
「這表裡面怎麼記？」

資料結構 (sort of)

「怎麼只追蹤台北人特質？」

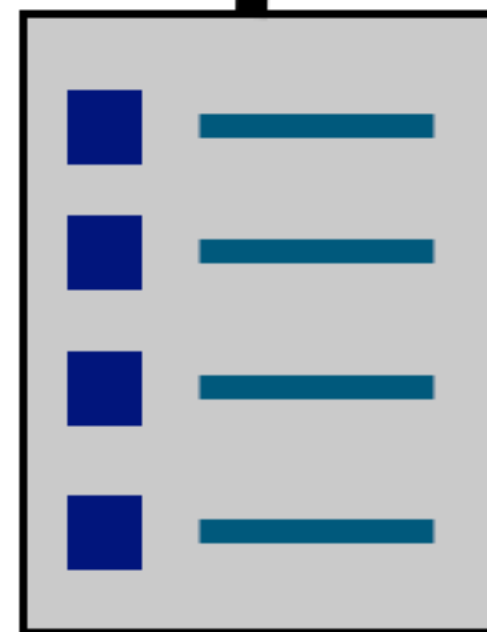


「電腦怎麼『轉』？」



U B' R2 ... F U

剪枝答案表



「這表裡面怎麼記？」

電腦如何看懂方塊

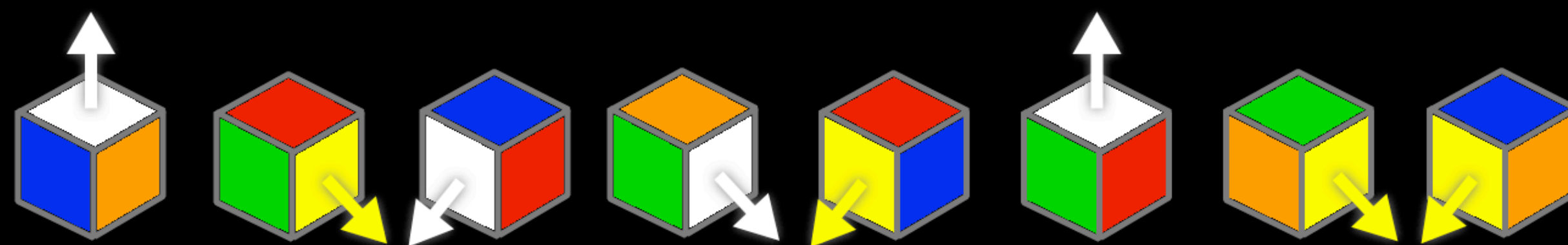


角塊色向 CO

邊塊色向 EO

角塊位置 CP

邊塊位置 EP



(0 1 2 1 2 0 1)

三進位

= 451

電腦如何看懂方塊



人看方塊

角塊色向 CO = 451

邊塊色向 EO = 2030

角塊位置 CP = 27415

邊塊位置 EP ∴

電腦看數字

CO Move Table

	U	U2	...	
0		
⋮				
451	883	...		
⋮				
2186		

電腦轉動方塊 = 查表

速度快

電腦「可以」怎麼解方塊

1. 用人類的方式解
2. 人類「善用電腦長處」，以人的智慧設計方法
- 3.

Takeaway

Takeaway

- 演算法根據目的和設備的不同，好壞有所差異
- 計算時間和空間的花費（複雜度, 實際, ...）
- 演算法不見得是完全照人類的邏輯進行，也會運用電腦的長處

上帝之數

任何三階魔方打亂 皆可在 20 步以內還原

≥ 18

≤ 52

1981
Morwen Thistlethwaite

Thistlethwaite 1981

G0: {L, R, F, B, U, D}

G1: {L, R, F, B, U2, D2}

G2: {L, R, F2, B2, U2, D2}

G3: {L2, R2, F2, B2, U2, D2}

I: 解好

7 步

13 步

15 步

17 步

≥ 18

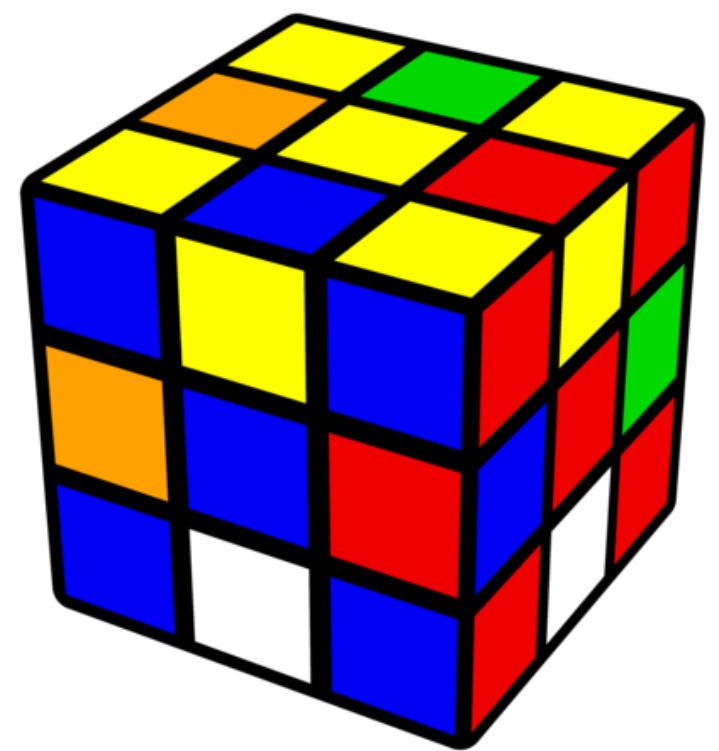
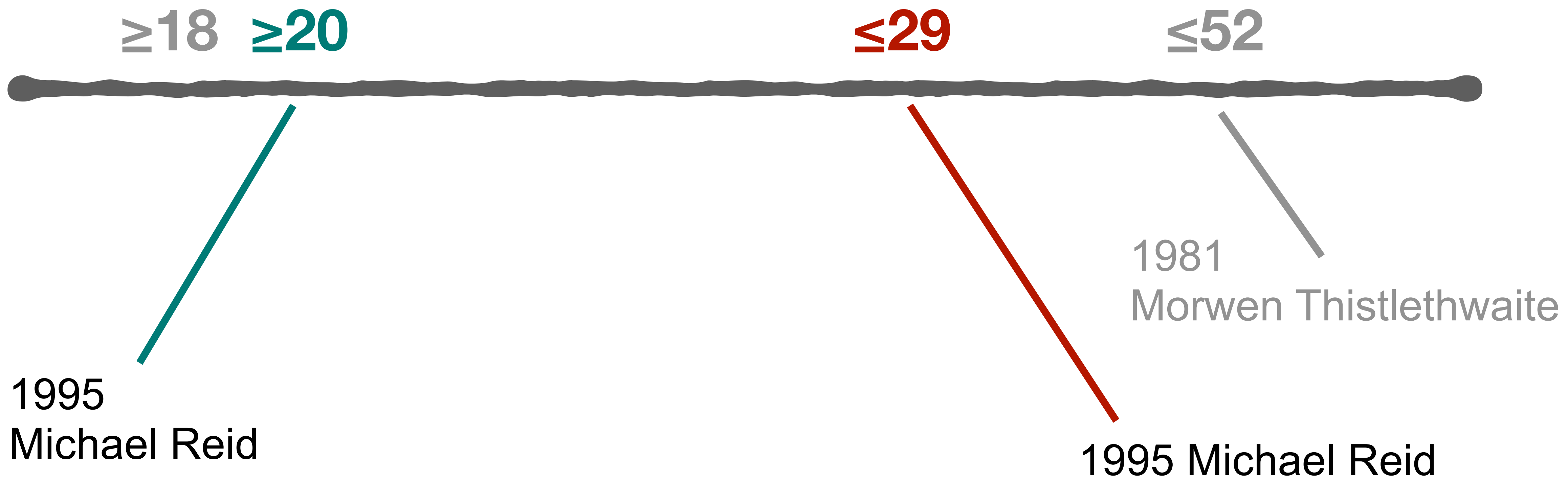
≤ 29

≤ 52

1981
Morwen Thistlethwaite

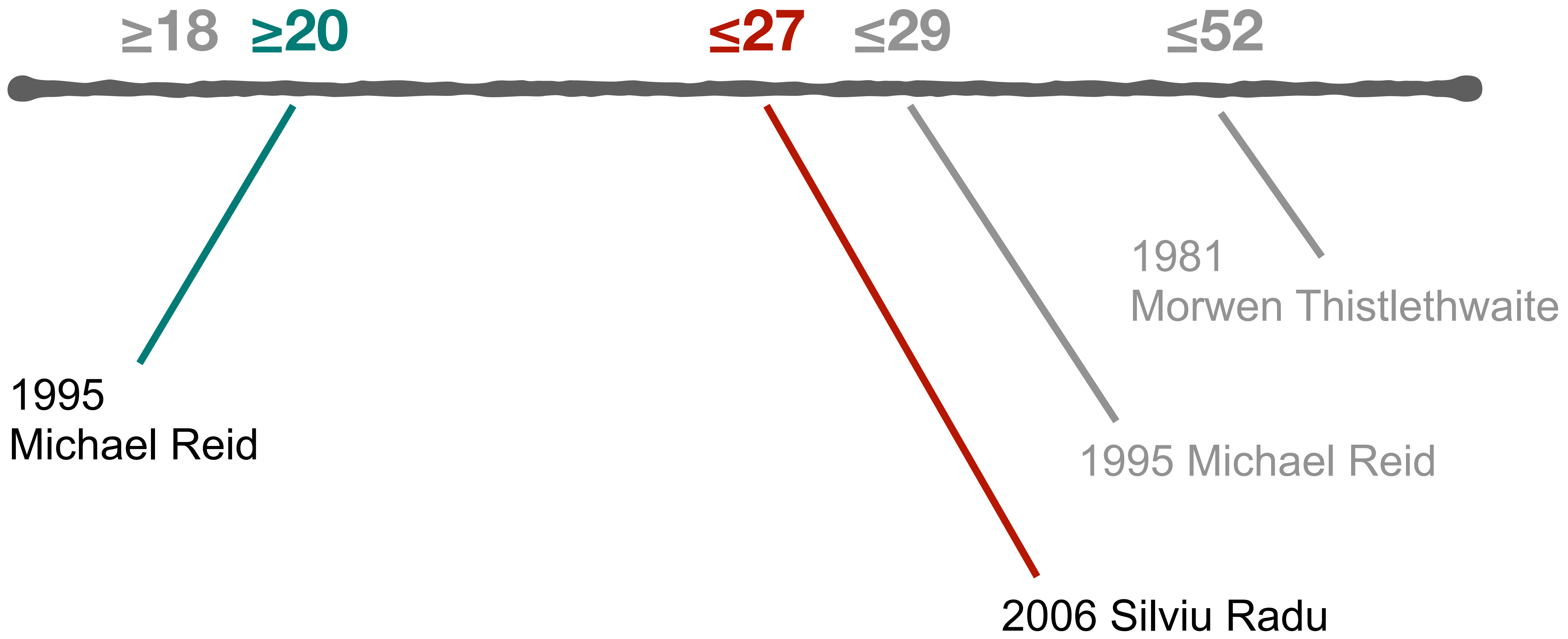
1995 Michael Reid
by analyzing Kociemba's Algorithm

(並無列出每次進步結果)

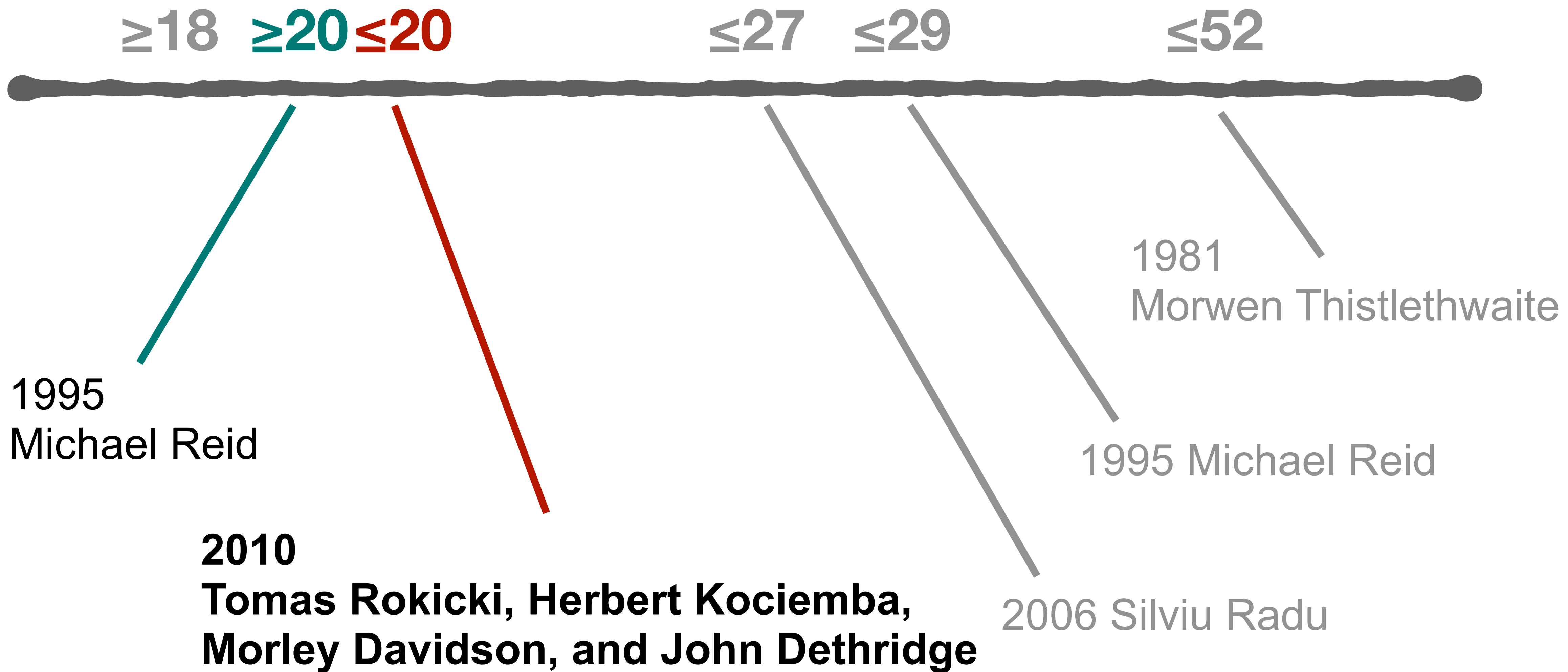


superflip

(並無列出每次進步結果)



(並無列出每次進步結果)



(並無列出每次進步結果)

cube20.org

把 4.3×10^{19} 個魔方可能組合都解出來

- Kociemba's algorithm
- 不求最少步，只要「夠少步」(預算 = 20 步)
- 分成 2G 組；一台電腦解一組
- 對稱性: 2G 組 \rightarrow 55M 組
- 35 CPU years @ Google

人可以反過來學這解法嗎？

還真的（算是）可以

最少步數解比賽 (FMC)

Face Moves

Clockwise R U F L D B

Counter-clockwise R' U' F' L' D' B'

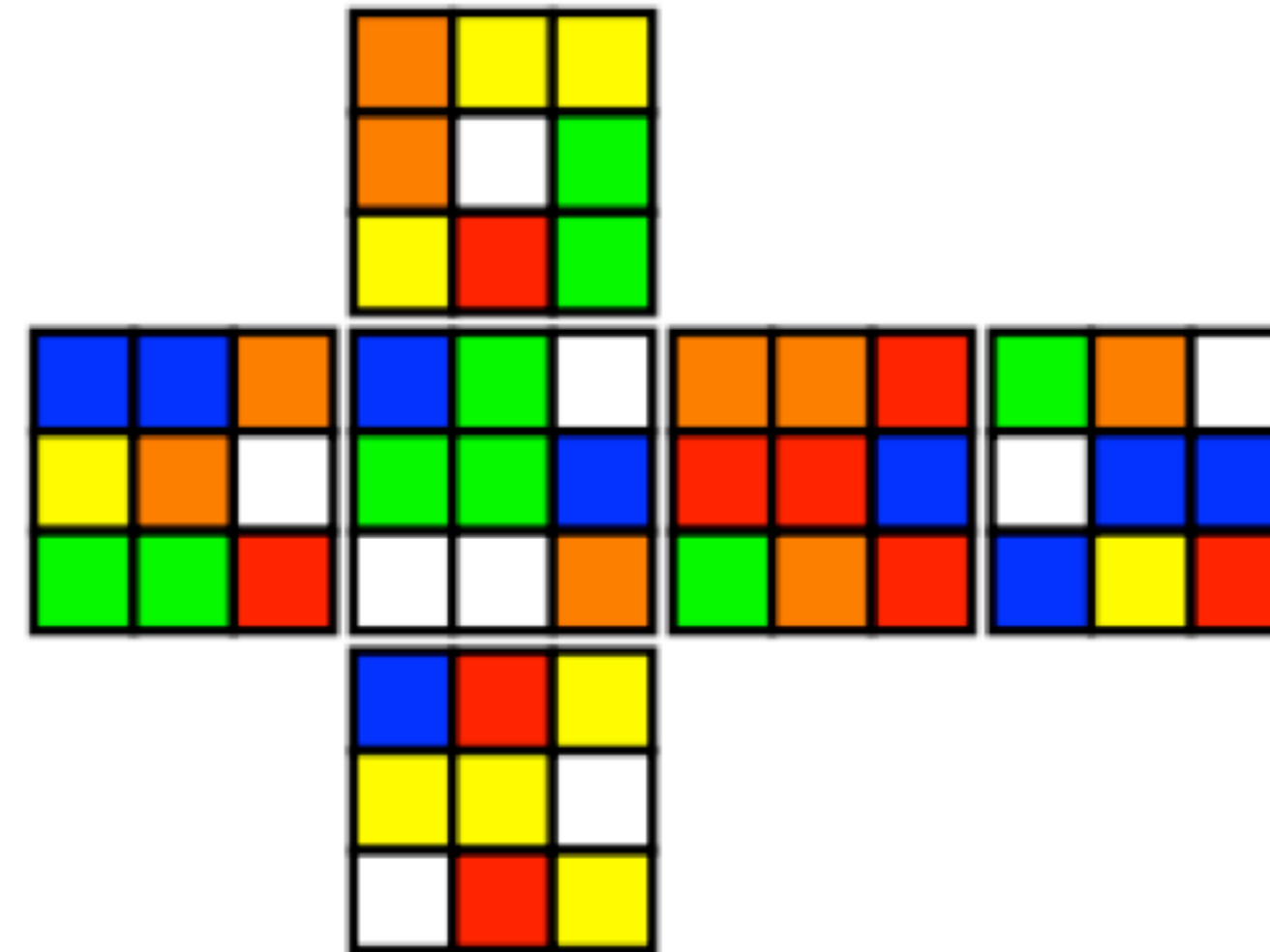
Double R2 U2 F2 L2 D2 B2

Rotations

Clockwise x y z

Counter-clockwise x' y' z'

Double x2 y2 z2



Scramble: R' U' F L2 F B L F2 U D2 L B2 U' F2 U D F2 B2 L2 B2 D' R2 D R' U' F

R2

F'

U2

R

F2

Domino Reduction



把方塊變成「可只用
L2, R2, F2, B2, U, D
就解好」的狀態

只用
L2, R2, F2, B2, U, D
解好方塊

有獎徵答！

目前官方 FMC 比賽，單次紀錄最少步是多少步？

19

18

17

16

題目: R' U' F D2 L2 F R2 U2 R2 B D2 L B2 D' B2 L' R' B D2 B U2 L U2 R' U' F

他的解法: D2 F' D2 U2 F' L2 D R2 D B2 F L2 R' F' D U'

項目 地區

型式 年份 性別 顯示 世界

單次 平均 所有年份 只看某年 某年為止 所有 男性 女性 100位參賽

#	名字	成績	國籍	比賽
1	Sebastiano Tronto	16	義大利	FMC 2019
2	Harry Savage	17	英國	British Blind Off 2019
2	Mark Boyanowski	17	美國	Mental Breakdown Minnesota 2019
2	Yiwei Liu (刘伊玮)	17	中國	Tianjin Summer Solstice 2021

電腦「可以」怎麼解方塊

1. 用人類的方式解
2. 人類「善用電腦長處」，以人的智慧設計方法
3. 人類智慧設計「框架」，讓電腦根據資料，最佳化這框架「發展智慧」

看著伴侶...
上次吃飯時間
嘴角角度
手放的位置
⋮



吃大餐?
買禮物?
⋮
按摩?

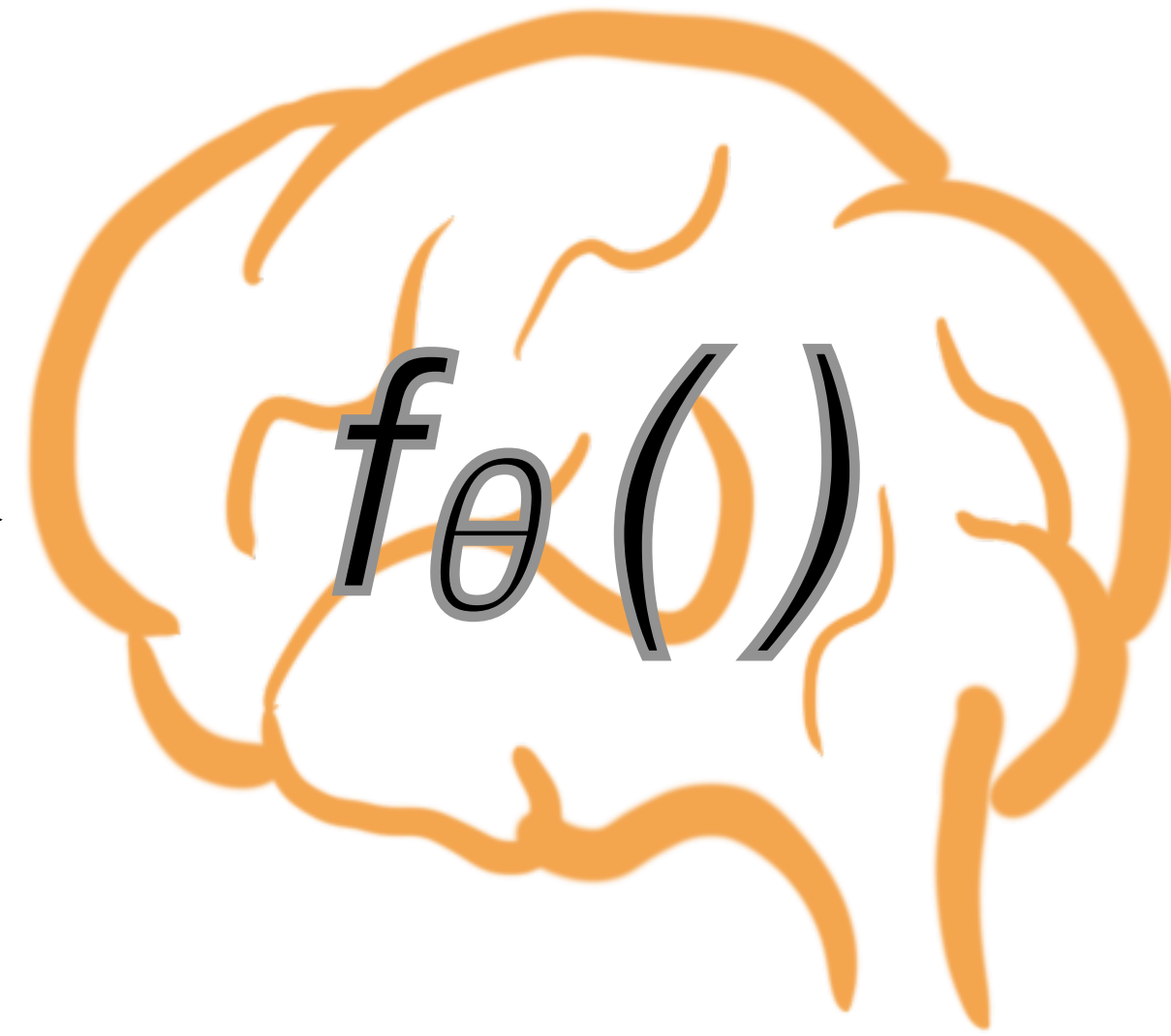
看著伴侶...

上次吃飯時間: 6hr

嘴角角度: -35

手放的位置: 肚

⋮



吃大餐

買禮物

⋮

按摩

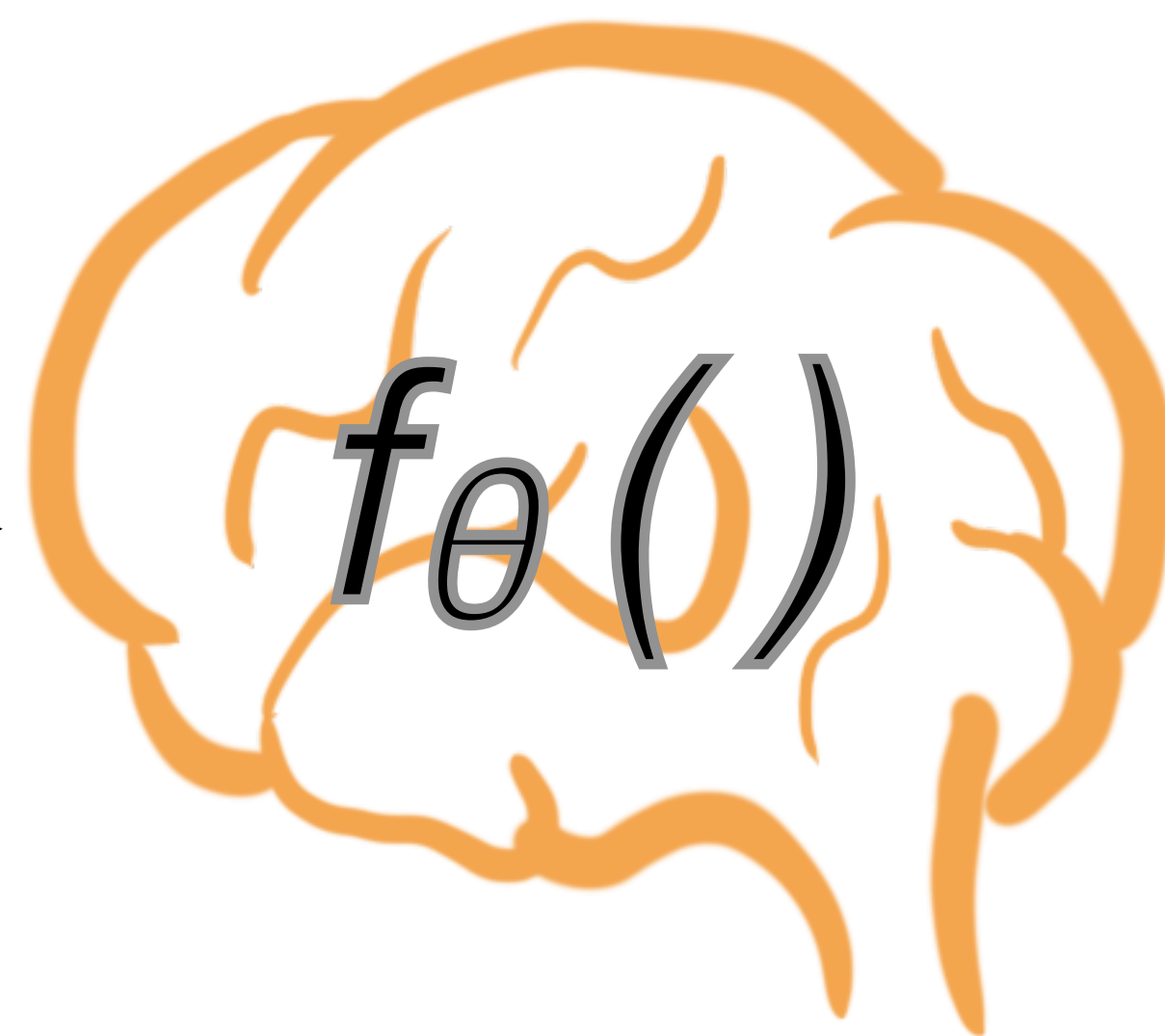
看著伴侶...

上次吃飯時間: 6hr

嘴角角度: -35

手放的位置: 肚

⋮



吃大餐

買禮物

⋮

按摩

伴侶說

吃大餐

買禮物

⋮

按摩!

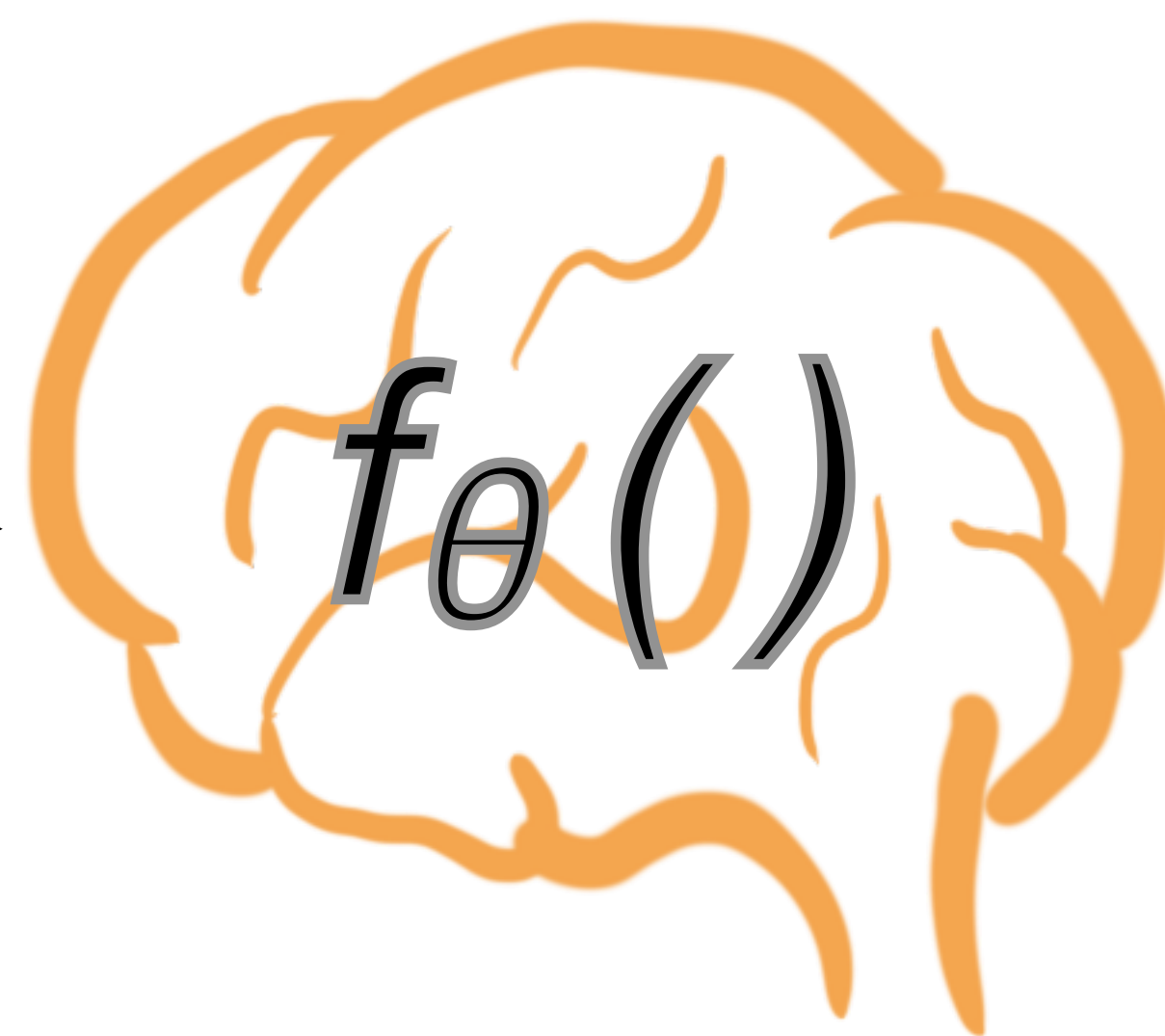
看著伴侶...

上次吃飯時間: 6hr

嘴角角度: -35

手放的位置: 肚

⋮



吃大餐

買禮物

⋮

按摩

伴侶說

吃大餐

買禮物

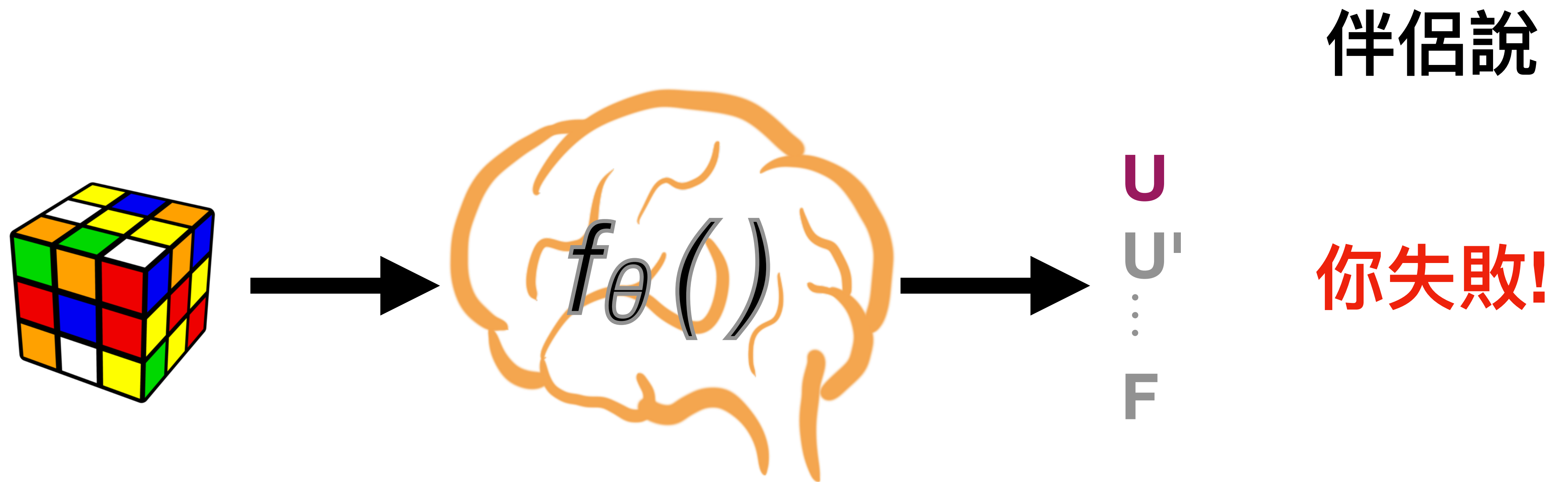
⋮

按摩!

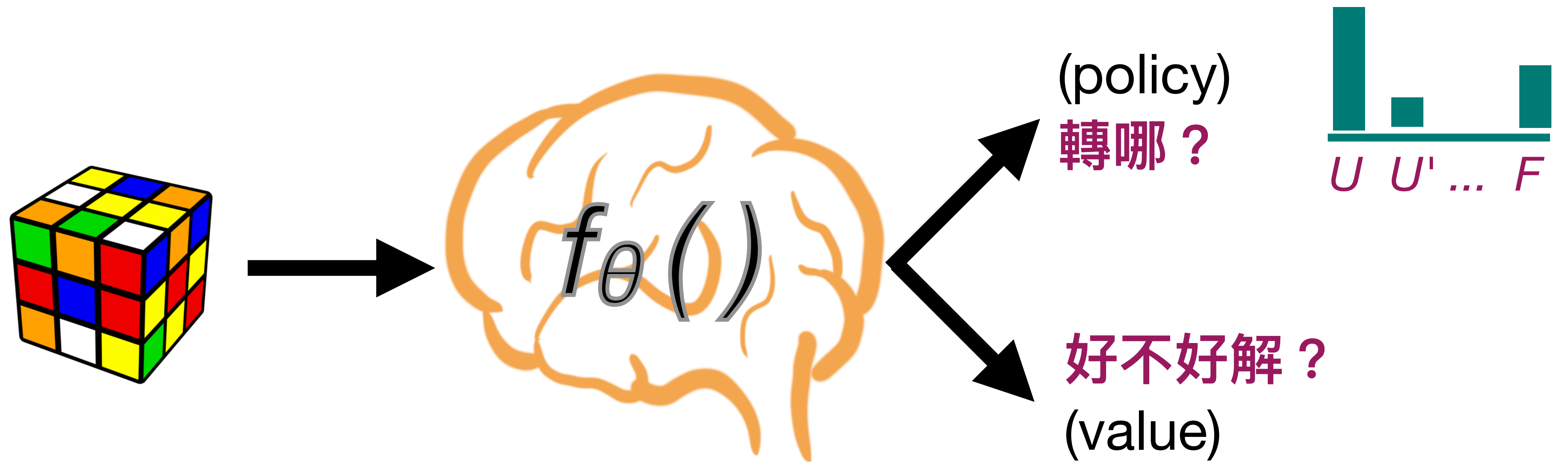
好的伴侶直接和你說答案

情況太多種沒辦法背，但你可以「計算」，

用資料訓練你的腦迴路，減低過去經驗的 "Loss"

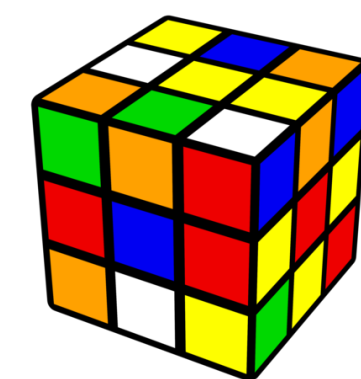


魔方是壞的伴侶，大部份時候都只說「沒解出來！」



還是... 準備「**現在自以為的**」資料訓練：
準備很多亂的方塊，和「自以為的」正確解答

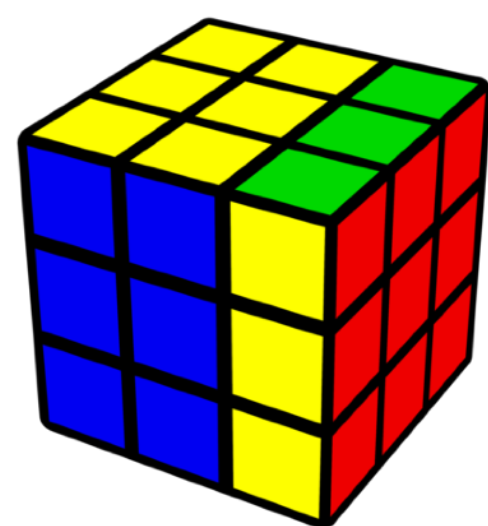
準備「自以為的」資料訓練



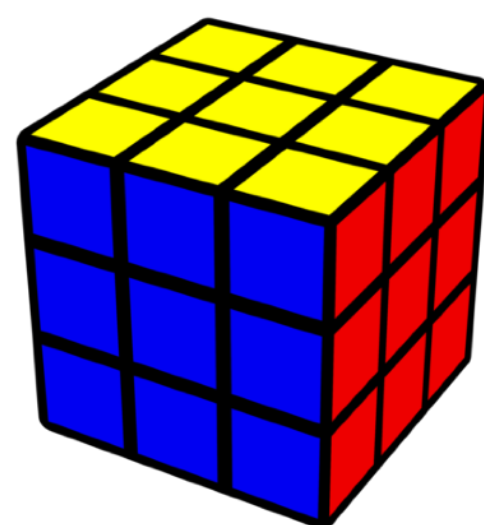
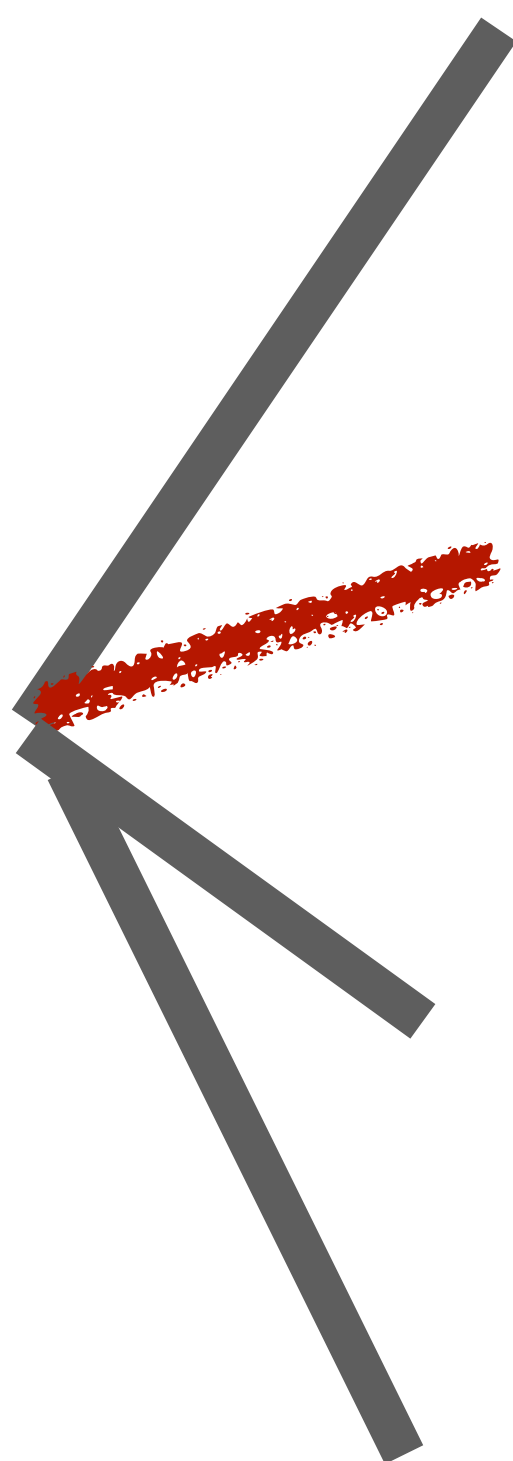
$f_{\theta}()$



policy
&
value

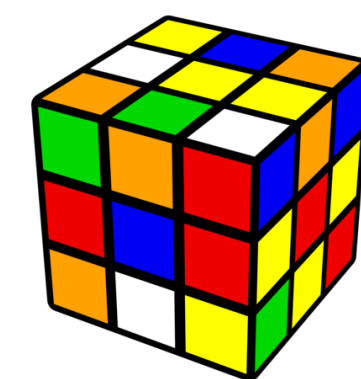


真答案: R



Reward! +1

準備「自以為的」資料訓練



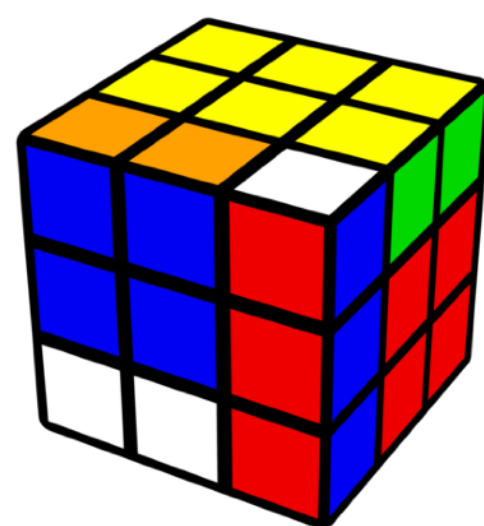
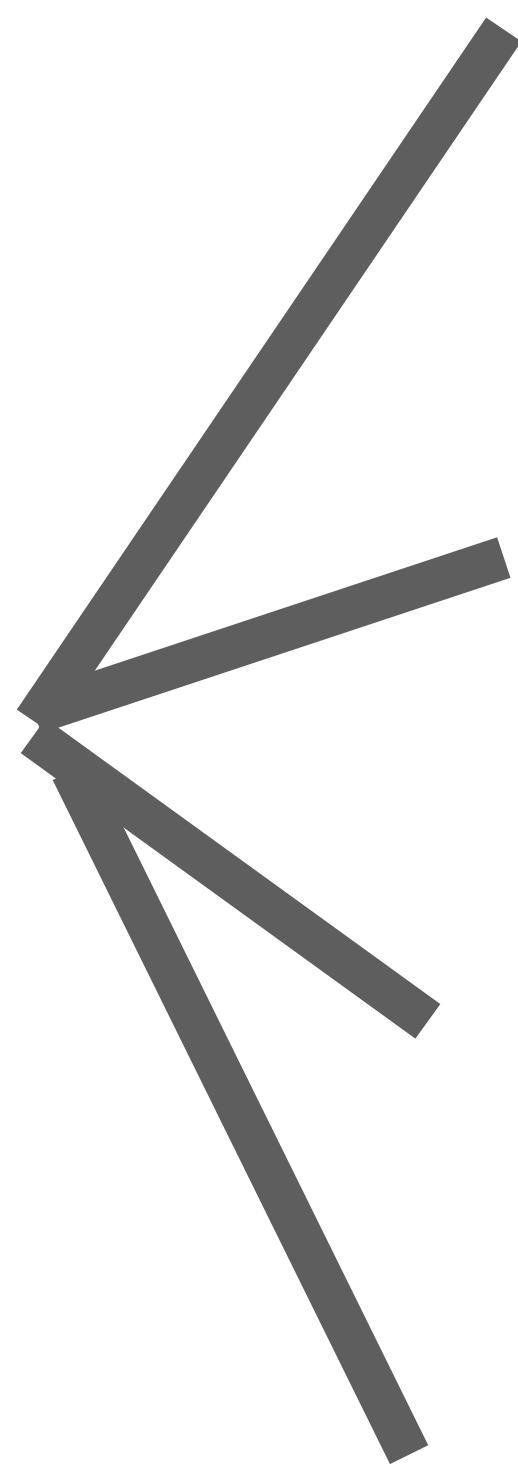
$f_{\theta}()$



policy
&
value



educated
guess: B'



$f(.)$ 認為最有希望的轉法

SOLVING THE RUBIK'S CUBE WITH APPROXIMATE POLICY ITERATION

Stephen McAleer*

Department of Statistics
University of California, Irvine
smcaleer@uci.edu

Forest Agostinelli*

Department of Computer Science
University of California, Irvine
fagostin@uci.edu

Alexander Shmakov*

Department of Computer Science
University of California, Irvine
ashmakov@uci.edu

Pierre Baldi

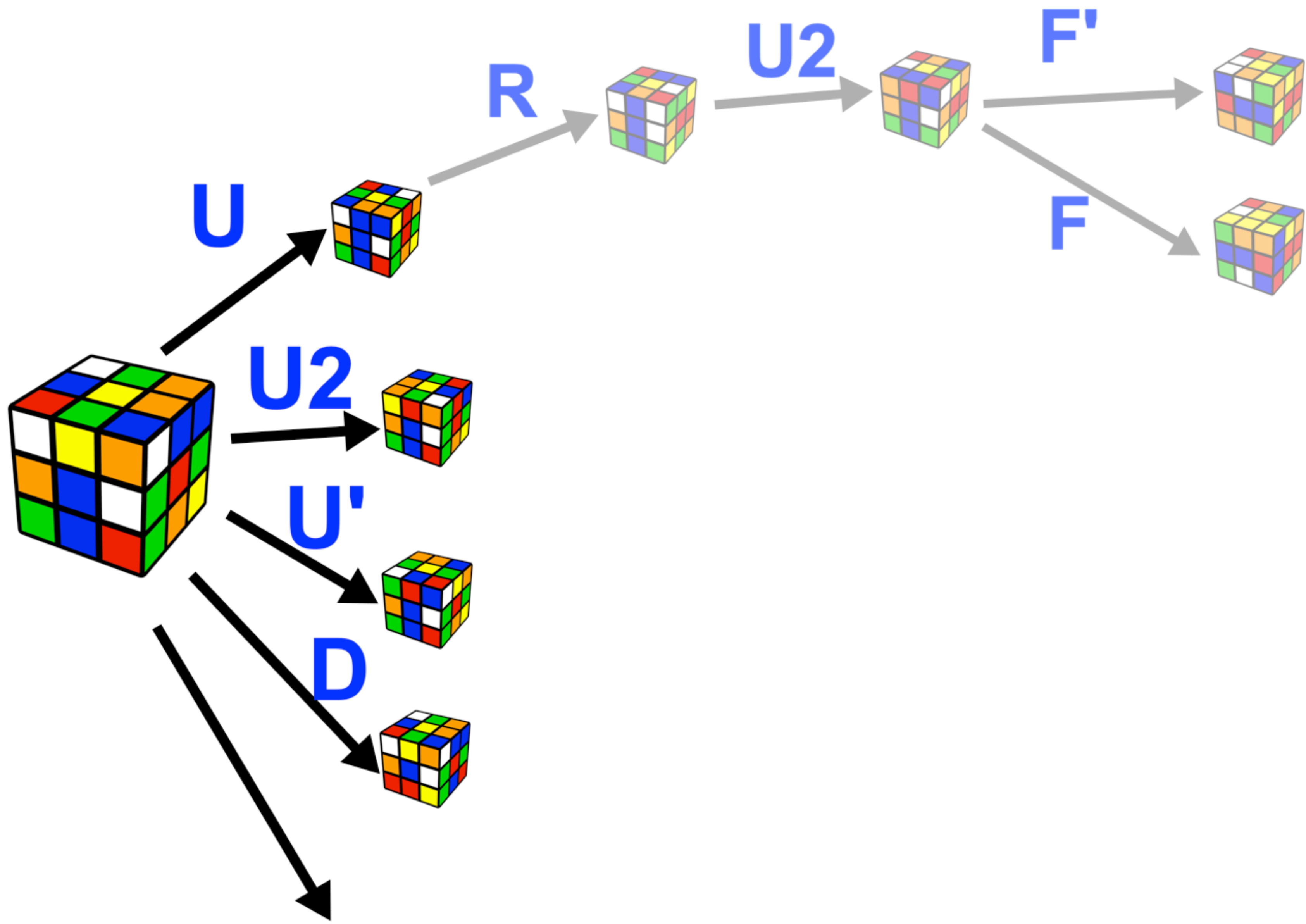
Department of Computer Science
University of California, Irvine
pfbaldi@ics.uci.edu

ABSTRACT

Recently, Approximate Policy Iteration (API) algorithms have achieved super-human proficiency in two-player zero-sum games such as Go, Chess, and Shogi without human data. These API algorithms iterate between two policies: a slow

SOLVING THE RUBIK'S CUBE WITH APPROXIMATE POLICY ITERATION (Stephen McAleer et al.)

<https://openreview.net/pdf?id=Hyfn2jCcKm>



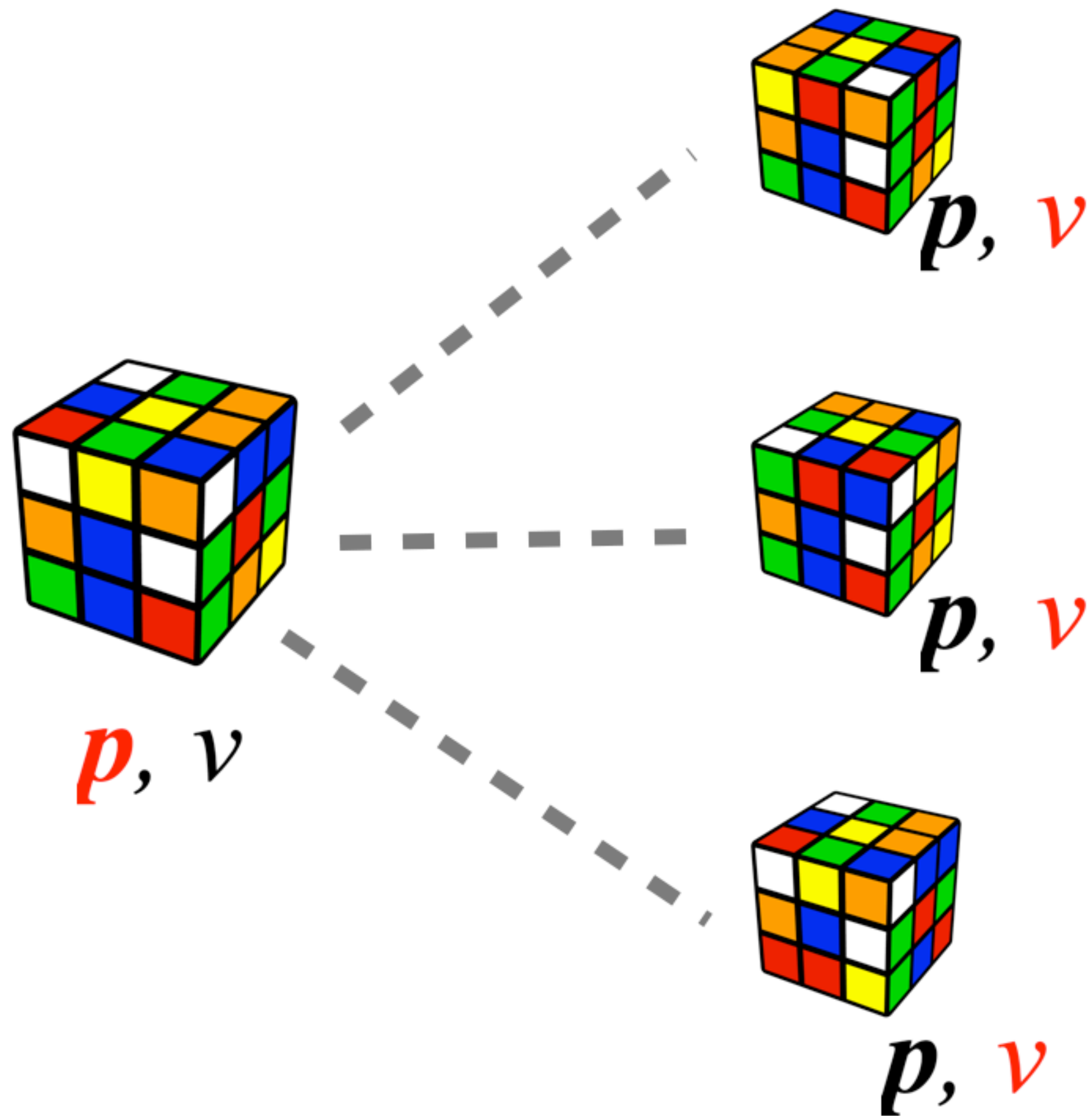
Monte Carlo tree search

選哪條路前進？根據

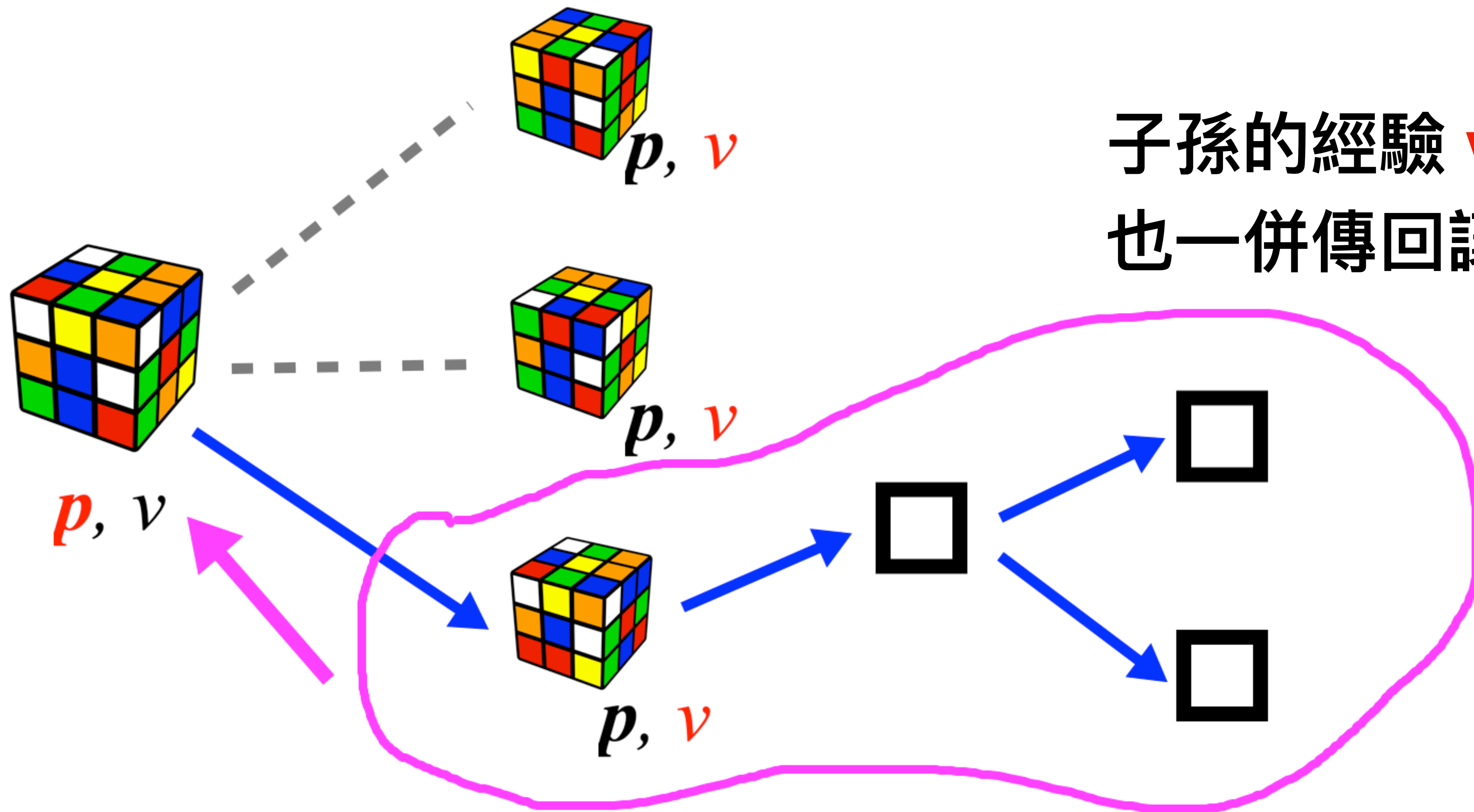
Educated guess 好不好解
和子孫的 v 有關

好奇心

和 $p \div$ 試過次數有關



Monte Carlo tree search



子孫的經驗 v 和試過次數
也一併傳回讓祖先考慮

電腦「可以」怎麼解方塊

1. 用人類的方式解
2. 人類「善用電腦長處」，以人的智慧設計方法
3. 人類智慧設計「框架」，讓電腦根據資料，最佳化這框架「發展智慧」

電腦如何解魔術方塊！

Reference

<https://www.jaapsch.net/puzzles/compcube.htm>

對 Kociemba 演算法的介紹，循序漸進言簡意賅

Reference

<http://kociemba.org/cube.htm>

原作者 Kociemba 本人的網頁，原汁原味，記載了
所有 Kociemba 演算法的細節

Reference

<https://github.com/hkociemba/RubiksCube-TwophaseSolver>

Kociemba 本人用 python 寫的 library + 主程式。這並不是 Cube Explorer 本身，不過可讀性很高，非常適合拿來做入門研究

Reference

<http://cube20.org/>

「上帝之數」的網頁，有歷史和相對應的連結供人
繼續參考

Reference

<https://deepcube.igb.uci.edu/>

[Solving the Rubik's Cube with Approximate Policy Iteration](#)

Stephen McAleer*, Forest Agostinelli*, Alexander Shmakov*, Pierre Baldi
*In Proceedings of the 7th International Conference on Learning
Representations (ICLR), 2019*

用 Deep RL 解魔術方塊

Reference

<https://web.stanford.edu/~surag/posts/alphazero.html>

<https://jonathan-hui.medium.com/monte-carlo-tree-search-mcts-in-alphago-zero-8a403588276a>

在讀 UCI 那篇論文時，順便找的關於 AlphaGo Zero 的資訊